C) Geometria

In questo capitolo verranno trattati i seguenti argomenti:

- Definizioni (terminologia)
- Simboli
- Angoli (tipi di angoli, forma sessagesimale e decimale)
- I triangoli (classificazione, punti e rette particolari dei triangoli, teorema di Pitagora, triangoli simili)
- I quadrilateri (classificazione, proprietà)
- I cerchi (elementi del cerchio e della circonferenza, angoli interni)
- Il calcolo delle superfici (formule, aree di superfici riconducibili ad aree fondamentali)
- Volumi (definizioni, formule principali)

1 Introduzione

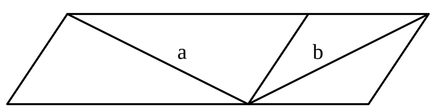
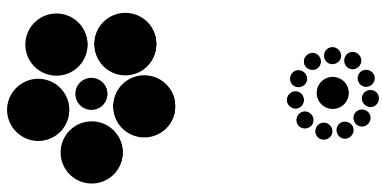
Domande introduttive

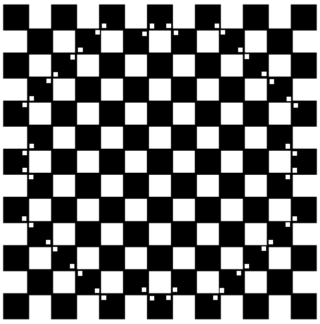
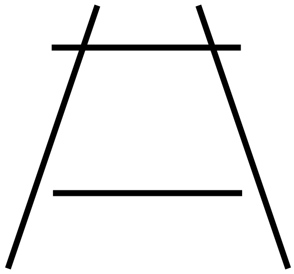
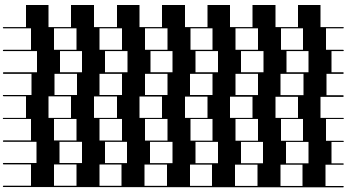
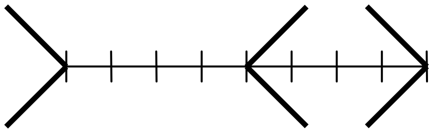
Cosa sono due figure congruenti?
Cos’è la simmetria assiale?
Qual è la differenza tra poligono e poligonale?

Il piano didattico disciplinare di matematica prevede le seguenti conoscenze di base per la MPT:

*“**Geometria**: definizioni fondamentali; angoli, triangoli, quadrilateri, poligoni regolari, cerchi, angoli relativi al cerchio, elementi e parti del cerchio e della circonferenza; scomposizione e calcoli di perimetri e di aree delle principali figure piane; riconoscere congruenze e similitudini, conoscere le applicazioni congruenti (trasformazioni isometriche di figure semplici); teorema di Pitagora (semplici addizioni); i solidi principali; i calcoli fondamentali ai solidi più importanti.”*

Prima di rivedere regole e formule di geometria elementare, consideriamo un aspetto importante.
Infatti, può capitare di studiare teoremi o cercare soluzioni di problemi geometrici la cui verità appare così ovvia che ogni dimostrazione sembra del tutto inutile. Tuttavia valutazioni di questo tipo sono spesso frettolose, basate sull’osservazione di una figura disegnata e non sul ragionamento valido in generale. La sola osservazione e l’evidenza visiva possono dare delle sorprese …
Ecco alcuni esempi che illustrano la necessità della dimostrazione evitando l’errore causato da un’osservazioni approssimativa.

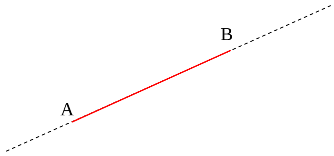
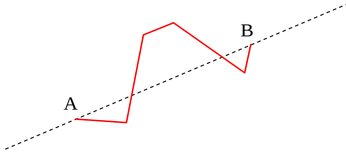
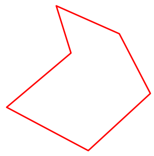
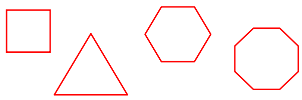
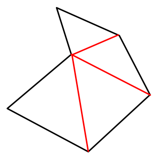
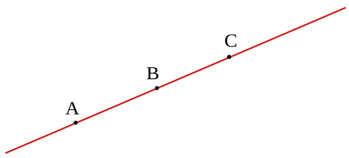
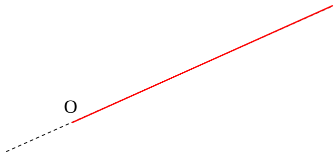
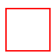
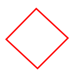
Il segmento *a* sembra più lungo del segmento *b*, mentre in realtà hanno la stessa lunghezza.	Il disco centrale di sinistra circondato da dischi più grandi, appare più piccolo di quello centrale di destra. Invece le dimensioni dei due dischi sono uguali.
	

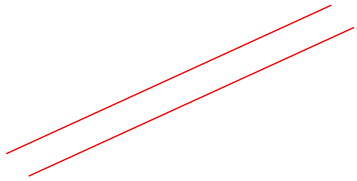
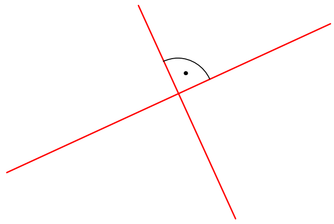
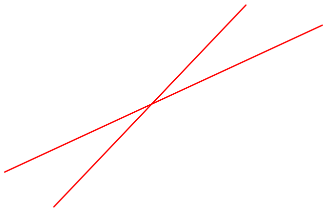
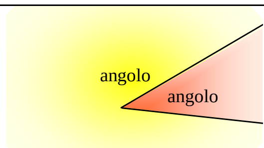
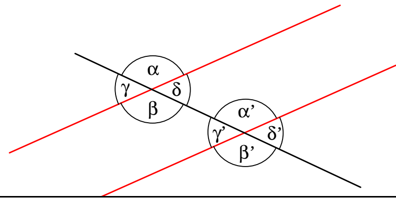
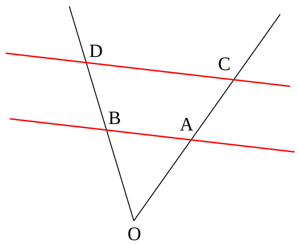
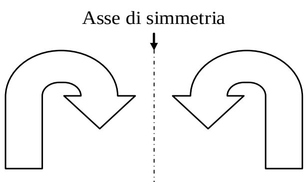
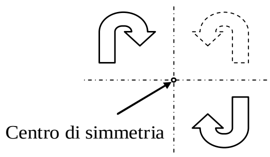
La “sfera” che emerge al centro, in realtà non esiste.	Le linee orizzontali sono lunghe uguali.
	
Le linee orizzontali sono parallele.	I due segmenti hanno la stessa lunghezza.
	

Soluzioni

Cosa sono due figure congruenti? Sono due figure sovrapponibili.
Cos’è la simmetria assiale? E’ la riproduzione di una figura rispetto a un asse di simmetria (specchio).
Qual è la differenza tra poligonale e poligono? La poligonale è una linea formata da più segmenti consecutivi, detti lati. Il poligono è una figura geometrica il cui contorno è una poligonale chiusa non intrecciata.

1.1 Definizioni della geometria piana

Terminologia	**Descrizione**	**Rappresentazione grafica**
Segmento	Linea più breve che congiunge due punti (**estremi**) A e B.	
Poligonale	Linea formata da più segmenti consecutivi. I segmenti si dicono **lati** , i loro estremi **vertici**. I lati non devono mai avere punti in comune, tranne gli estremi (si dice anche: non intrecciata)	
Poligono	Figura geometrica il cui contorno è una poligonale chiusa non intrecciata. I poligoni prendono il nome dal numero di lati che possiedono: triangoli, quadrilateri, pentagoni, esagoni, …	
Poligono regolare	Poligono con tutti i lati e tutti gli angoli uguali.	
Diagonali di un poligono	Segmenti che congiungono un vertice di un poligono con un vertice non consecutivo (il triangolo non possiede diagonali) .	
Retta	I tre punti situati sulla retta si dicono **allineati**.	
Semiretta	Una delle due parti nelle quali un punto suddivide una retta. Il punto di inizio si chiama **origine**.	
Figura geometrica	Insieme di punti del piano.	Segmenti, rette, semirette, angoli, linee a mano libera, …
Congruente	Tutti i punti di una figura combaciano con tutti i punti di una seconda figura.	 è congruente a 

Rette parallele	Nel piano sono rette che non si intersecano mai.	
Rette perpendicolari	Rette che si intersecano formando angoli di 90°.	
Rette incidenti	Rette che hanno un solo punto in comune.	
Angolo	Una delle due parti di piano delimitate da due semirette che hanno la stessa origine. L'origine è il **vertice** dell'angolo.	
Angoli formati da due rette parallele e da una retta trasversale	**angoli opposti al vertice:** $\alpha = \beta;\ \gamma = \delta$ **angoli corrispondenti:** $\alpha = \alpha';\ \beta = \beta';\ \gamma = \gamma';\ \delta = \delta'$	
Proporzioni tra segmenti formati da due parallele e due semirette con la stessa origine	$\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB};\ \frac{OC}{OA} = \frac{DC}{AB}$ $\frac{OD}{OB} = \frac{DC}{AB};\ \frac{OB}{BD} = \frac{OA}{AC}$	
Simmetria assiale	Trasformazione geometrica speculare (rispetto a un **asse di simmetria**).	
Simmetria centrale	Trasformazione geometrica rispetto a un **centro di simmetria** (si tratta di una rotazione di 180°) .	

1.2 Simboli utilizzati

Simbolo	**Significato**
a, b, c, …	Le lettere **minuscole** definiscono **lunghezze** (rette, segmenti, lati, spigoli, …)
A, B, C, …	Le lettere **maiuscole** definiscono punti (vertici, …)
α, β, γ, …	Le lettere minuscole **dell'alfabeto greco** definiscono angoli
AB	**Segmento** di estremi AB
ABC	**Triangolo** di vertici ABC
ABCD	**Quadrilatero** di vertici ABCD
ABCDE…	**Poligono** di vertici ABCDE…
$\lvert a \rvert$	**Lunghezza** del segmento a
$\lvert AB \rvert$	**Lunghezza** del segmento AB
$r // s$	La retta r è **parallela** alla retta s
$r \perp s$	La retta r è **perpendicolare** alla retta s
$r \cap s = \{ P \}$	r **interseca** s in P (P è il punto di intersezione di r e s)
$P \in r$	P **appartiene** a r (P è un punto situato sulla retta r)
$P \notin r$	P **non appartiene** a r (P è un punto che non si trova sulla retta r)
$\angle(a,b) = A\hat{C}B = \gamma$	**Angolo** γ del triangolo ABC
P	**Perimetro**
A	**Area** di una superficie
A_b	**Area di base**
A_ℓ	**Area laterale**
V	**Volume**
$ABC \approx DEF$	Il triangolo ABC è **congruente** al triangolo DEF

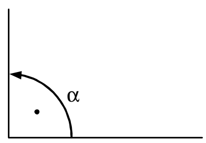
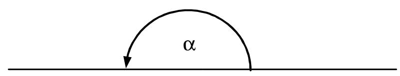
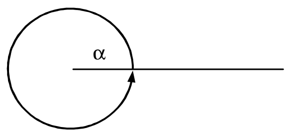
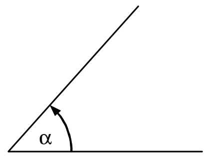
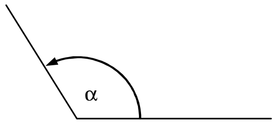
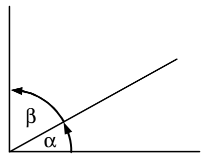
2 Angoli

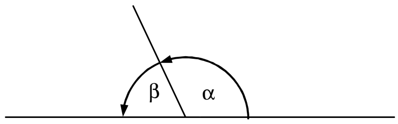
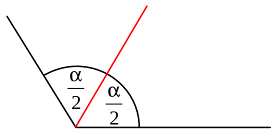
Domanda introduttiva

Quanto vale l'angolo definito dalle bisettrici di due angoli supplementari?

Un capitolo previsto nel programma di MPT è la trigonometria. Esso prevede lo studio delle relazioni tra angoli e lati dei triangoli. La goniometria, studia in modo più generale la relazione tra segmenti e ampiezza degli angoli.

2.1 Tipi di angoli

Denominazione	Significato	Esempio
Angolo retto	$\alpha = 90°$	
Angolo piatto	$\alpha = 180°$	
Angolo giro	$\alpha = 360°$	
Angolo acuto	$0° < \alpha < 90°$	
Angolo ottuso	$90° < \alpha < 360°$	
Angoli complementari	La somma dei due angoli è 90°	

Angoli supplementari	La somma dei due angoli è 180°	
Bisettrice di un angolo	Retta che divide un angolo in due parti uguali	

Gli angoli si possono esprimere con le seguenti forme:

forma sessagesimale: 20,5° corrisponde a 20° 30'
forma decimale: 42° 15' corrisponde a 42,25°.

Analogamente a quanto avviene con l'orario, le ore 2 e 15 minuti corrispondono alle " due e un quarto" ossia 2,25 ore. Viceversa le "cinque e mezza" corrispondono alle ore 5 e 30 minuti ossia 5,5 ore.

Come passare da una forma all'altra? Vediamolo con i seguenti due esempi:

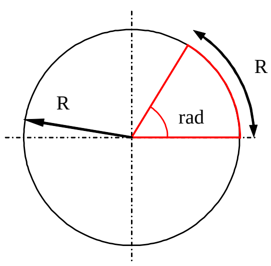
1) $56{,}48° =$
$= 56° + 0{,}48° = 56° + (0{,}48 \cdot 60)' = 56° + 28{,}8' = 56° + 28' + (0{,}8 \cdot 60)'' = 56° + 28' + 48''$
che si scrive: $56°\ 28'\ 48''$

2) $36°\ 20'\ 42'' = 36° + \left(\frac{20}{60}\right)^{o} + \left(\frac{42}{3600}\right)^{o} = 36{,}345°$

2.2 Il radiante

Oltre alla suddivisione di un angolo giro in 360°, è possibile esprimere la misura di un angolo con un'altra unità di misura: il **radiante**.

Calcolando con le ampiezze degli angoli in gradi, abbiamo già notato la complicazione nell'utilizzo dei sottomultipli (gradi, primi, secondi). Di conseguenza i calcoli saranno facilitati esprimendo la misura degli angoli in radianti. **Il radiante** è la misura di un angolo con il vertice nel centro di una circonferenza che definisce un arco di lunghezza uguale al raggio:



<u>Osservazione</u>: il radiante non si esprime con un'unità di misura perché risulta dal rapporto fra la lunghezza definita sulla circonferenza diviso il raggio: $1 \text{ radiante} = \frac{R\,[m]}{R\,[m]} = 1[-]$.

Infatti, sul cerchio di raggio R = 1, la misura in radianti corrisponde alla lunghezza dell'arco.

Non dovrebbero sussistere confusioni con le unità di misura poiché gli angoli espressi in gradi si scrivono così: $\alpha = 5°$, mentre gli angoli espressi in radianti si scrivono così: $\alpha = 5$.

Un angolo al centro di 360° corrisponde ad un angolo giro che definisce un arco equivalente all'intera circonferenza, cioè 2π. Quindi:

$$\boxed{360^{o} = 2\pi\left(=\frac{2\pi.R}{R}\right) \Rightarrow \pi = 180^{o}}$$

Grazie a questa uguaglianza si possono trasformare gli angoli da radianti in gradi nel modo seguente:

per esempio un angolo in radianti di $\frac{\pi}{4}$ corrisponde a: $\frac{180^{o}}{4} = 45^{o}$.

Viceversa la trasformazione da gradi in radianti viene svolta utilizzando una proporzione:

per esempio un angolo di 60° corrisponde a: $\frac{\pi}{180^{o}} = \frac{x}{60^{o}} \Rightarrow x = 60^{o} \cdot \frac{\pi}{180^{o}} = \frac{\pi}{3}$.

Ecco alcune corrispondenze tra angoli in gradi e radianti:

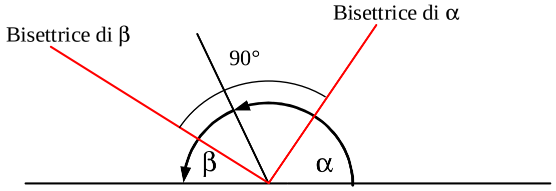
Angolo in gradi	0°	30°	45°	60°	90°	360°
Angolo in radianti	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	2π

Osservazione:

nei calcoli con i radianti lasciare il π e non sostituire con 3,14... Per esempio: $90^{o} = \frac{\pi}{2}$ e non $90^{o} \cong 1{,}57$.

Soluzione

Quanto vale l'angolo definito dalle bisettrici di due angoli supplementari?



L'angolo vale esattamente 90°.

3 Triangoli

La padronanza delle caratteristiche e delle proprietà dei triangoli è fondamentale per capire il capitolo della trigonometria, uno dei capitoli di geometria non trattato nel programma di Scuola Media ma previsto nel programma MPT.

3.1 Tipi di triangoli

Domande introduttive

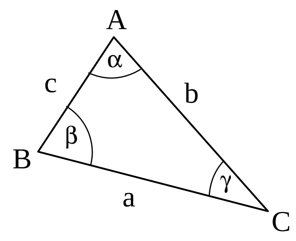
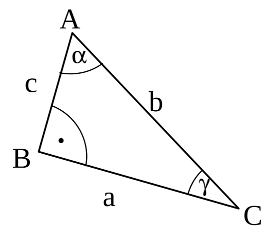
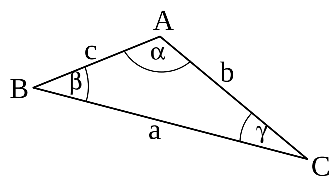
Qual è la differenza tra un triangolo generico (senza particolarità) e un triangolo equilatero?
Un triangolo può essere rettangolo e isoscele?

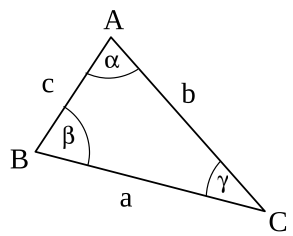
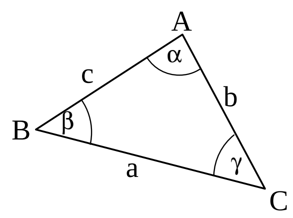
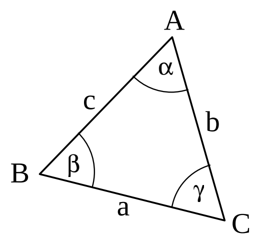
Rappresentazione e denominazioni del triangolo:

Elementi del triangolo	Denominazioni
Vertici	Con lettere maiuscole (A, B, C, D, …), in senso antiorario.
Lati	Con le lettere minuscole (a, b, c, d, …): i lati assumono la lettera corrispondente al vertice che sta di fronte al lato.
Angoli	Con le lettere minuscole dell'alfabeto greco corrispondenti alle lettere dei vertici (α, β, γ, δ, …). La **somma degli angoli vale sempre 180°**: $\alpha+\beta+\gamma=180^{o}$

Esempi:

I triangoli possono essere classificati secondo le caratteristiche seguenti:

secondo gli angoli interni		
Triangolo acutangolo	Ha tre angoli acuti ($\alpha < 90°$, $\beta < 90°$, $\gamma < 90°$)	
Triangolo rettangolo	Ha un angolo retto ($\beta = 90°$) $\alpha + \gamma = 90^{o}$	
Triangolo ottusangolo	Ha un angolo ottuso ($\alpha > 90°$)	

secondo i lati		
Triangolo generico (scaleno)	Ha tre lati di lunghezza diversa: $a \neq b \neq c$ Di conseguenza: $\alpha \neq \beta \neq \gamma$	
Triangolo isoscele	Ha almeno due lati lunghi uguali, per esempio: $b = c$ Di conseguenza: $\beta = \gamma$	
Triangolo equilatero	Ha tutti i lati lunghi uguali: $a = b = c$ Di conseguenza: $\alpha = \beta = \gamma$	

Soluzioni

Qual è la differenza tra un triangolo generico e un triangolo equilatero?

Un triangolo generico ha tre lati di diversa lunghezza e i tre angoli di diverse ampiezze. Il triangolo equilatero ha i tre lati lunghi uguali e i tre lati di medesima ampiezza (60°).

Un triangolo può essere rettangolo e isoscele?

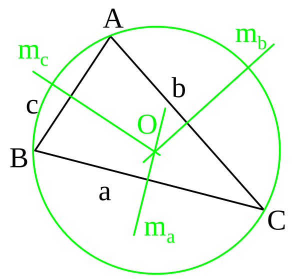
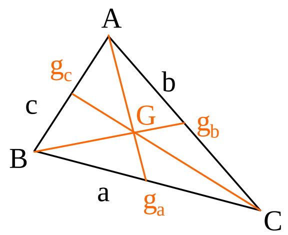
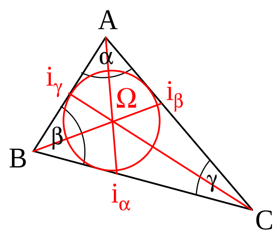
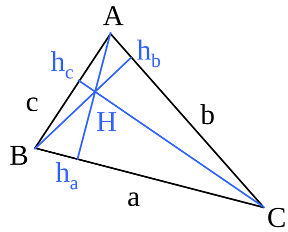
Sì, i due lati lunghi uguali definiscono l’angolo di 90°.

3.2 Punti e rette particolari dei triangoli

Situazione introduttiva

Si desidera costruire una casa triangolare (10 m; 5 m; 8 m) (puoi provare a disegnarla in scala).

- Come determinare il punto esatto sul quale va posizionata la gru che deve raggiungere i tre vertici della casa?
- Dove si deve posare il pilastro nella cantina (che, assieme ai muri perimetrali, deve sostenere il piano terreno) sapendo che esso deve trovarsi nella posizione migliore per sostenere il pavimento (centro di gravità)?
- Dove si trova il centro di un cerchio ornamentale che il piastrellista vuole creare sul pavimento del piano terreno in modo tale che il cerchio passi alla stessa distanza dai tre muri perimetrali?

Denominazione	Simbolo	L'intersezione delle rette corrisponde al	Esempi
Mediatrici Assi dei tre lati .	**m**	**Circocentro** (cerchio circoscritto**,** abbreviato con O) **Osservazione:** il circocentro può trovarsi internamente, esternamente o su un lato del triangolo.	
Mediane Congiungono il vertice con il punto medio del lato opposto.	**g**	**Baricentro** (centro di gravità, abbreviato con G) **Osservazione:** il baricentro suddivide le mediane in un rapporto 2:1.	
Bisettrici Semirette che suddividono l'angolo in due parti uguali.	**i**	**Incentro** (cerchio iscritto, abbreviato con Ω) **Osservazione:** l'intersezione delle bisettrici degli angoli esterni determinano i centri dei tre cerchi esterni.	
Altezze Segmenti che dal vertice scendono perpendicolarmente sul lato opposto.	**h**	**Ortocentro** (abbreviato con H) **Osservazione:** l'ortocentro può trovarsi internamente, esternamente o su un lato del triangolo.	

Soluzione

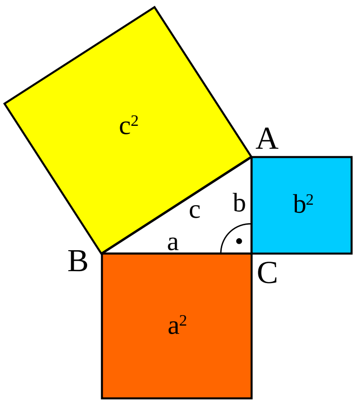
- La gru si troverà sul circocentro: corrisponde all'intersezione delle tre mediatrici.
- Il pilastro va posato in corrispondenza del baricentro: corrisponde all'intersezione delle tre mediane.
- Il centro del cerchio corrisponde all'incentro, ossia all'intersezione delle bisettrici.

3.3 Il teorema di Pitagora

Domande introduttive

1) Con una corda suddivisa esattamente in 12 parti uguali, è possibile definire un triangolo rettangolo senza l'aiuto di nessuno strumento geometrico (senza squadra, gonimetro, …)?
2) Se il lato di un triangolo equilatero è lungo 1, quanto vale la lunghezza della sua altezza?

In ogni triangolo **rettangolo** la somma dei quadrati definiti dai cateti è uguale al quadrato definito dall'ipotenusa:



In riferimento al disegno abbiamo, in forma analitica:

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Dalla quale si estraggono le seguenti formule (sempre in riferimento al disegno sopra):

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$
$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$
$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2}$

Naturalmente se le lettere dei lati del triangolo vengono scambiate, anche le formule devono essere adattate di conseguenza.

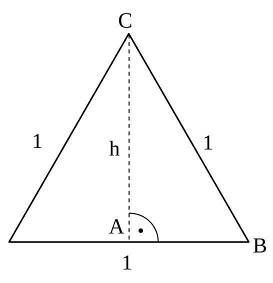
Soluzioni

1) Con una corda suddivisa esattamente in 12 parti uguali, è possibile definire un triangolo rettangolo senza l'aiuto di nessuno strumento geometrico (senza squadra, gonimetro, …)?

   I tre lati del triangolo saranno costituiti da un tratto di corda comprendente, rispettivamente, 3, 4 e 5 parti uguali.
   In questo modo, avremo la seguente relazione: $3^2 + 4^2 = 5^2$, corrispondente al Teorema di Pitagora e realizzando così un triangolo rettangolo.

2) Se il lato di un triangolo equilatero è lungo 1, quanto vale la lunghezza della sua altezza?

   Analizzando il seguente disegno, in particolare metà triangolo equilatero (triangolo ABC) e applicando il teorema di Pitagora, abbiamo:



$$h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3.4 Triangoli simili

Situazione introduttiva

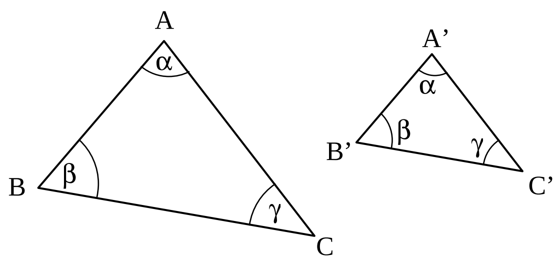
In un pomeriggio soleggiato una persona alta 1,80 m riesce a misurare la lunghezza dell'ombra proiettata sul terreno che risulta essere di due metri. Quanto è alto un obelisco vicino a questa persona che proietta un'ombra sullo stesso terreno di 5 m?

Triangoli simili

I triangoli ABC e A'B'C' sono **simili** poiché l'ampiezza dei tre angoli è la stessa.
Valgono quindi le seguenti relazioni:

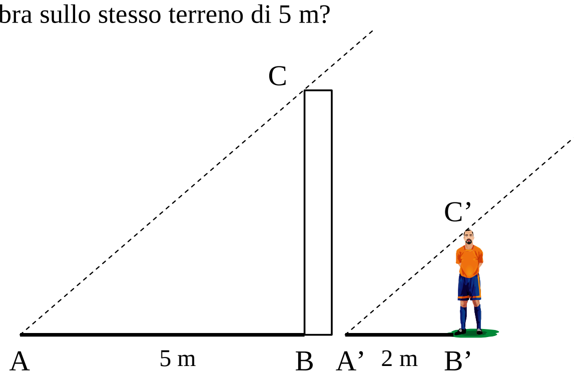
$$\boxed{\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}}$$

dalle quali si possono dedurre altre uguaglianze.



Soluzione

In un pomeriggio soleggiato una persona alta 1,80 m riesce a misurare la lunghezza dell'ombra proiettata sul terreno che risulta essere di due metri. Quanto è alto un obelisco vicino a questa persona che proietta un'ombra sullo stesso terreno di 5 m?



Il Sole, trovandosi a una distanza molto grande dalla Terra, proietta i suoi raggi luminosi in modo tale che essi possono essere ritenuti paralleli (quindi il raggio rappresentato dal tratto AC è parallelo al raggio rappresentato da A'C'). Di conseguenza i triangoli ABC e A'B'C' sono simili. Possiamo quindi scrivere la seguente relazione:

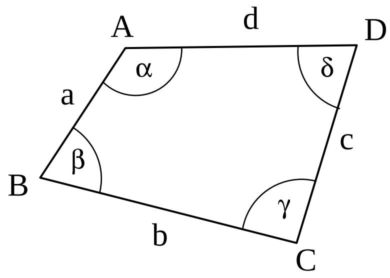
$$\frac{CB}{AB} = \frac{C'B'}{A'B'} \Rightarrow CB = AB \cdot \frac{C'B'}{A'B'} = 5\text{ m} \cdot \frac{1{,}80\text{ m}}{2\text{ m}} = 4{,}50\text{ m}$$

4 Quadrilateri

La rappresentazione e la denominazione degli elementi di un quadrilatero è la seguente:

Elementi del quadrilatero	**Denominazioni**
Vertici	Con lettere maiuscole (A, B, C, D, …).
Lati	Con le lettere minuscole (a, b, c, d, …).
Angoli	Con le lettere minuscole dell'alfabeto greco corrispondenti alle lettere dei vertici (α, β, γ, δ, …). La **somma degli angoli vale sempre 360°** : $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^{o}$.

Esempio:

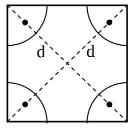
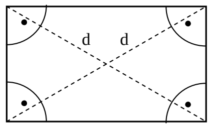
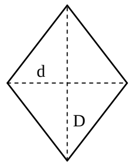
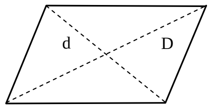
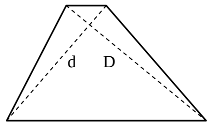
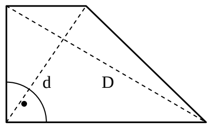
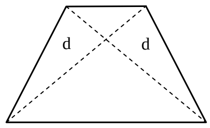
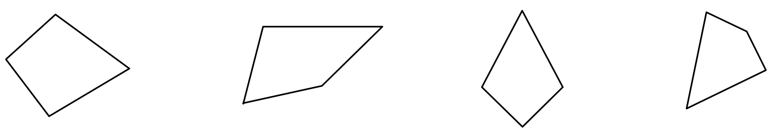


4.1 Tipi di quadrilateri

Domande introduttive

Quali quadrilateri fanno parte della categoria dei parallelogrammi?
Cosa differenzia un parallelogramma generico (romboide) da un rombo?

I quadrilateri possono essere classificati nel modo seguente:

Quadrilateri: poligoni con 4 lati	**Parallelogrammi:** lati opposti paralleli	**Quadrato** (lati lunghi uguali e diagonali lunghe uguali, quattro angoli retti).	
		Rettangolo (lati opposti lunghi uguali e diagonali lunghe uguali, quattro angoli retti).	
		Rombo (lati lunghi uguali e diagonali di diversa lunghezza, angoli opposti uguali).	
		Parallelogramma generico (romboide)	
	Trapezi: due lati paralleli	**Trapezio generico** (chiamato anche scaleno: lati , angoli e diagonali di diversa lunghezza).	
		Trapezio rettangolo (ha almeno un angolo retto).	
		Trapezio isoscele (lati obliqui lunghi uguali, diagonali uguali).	
			

Soluzioni

Quali quadrilateri fanno parte della categoria dei parallelogrammi?
I quadrilateri che sono anche parallelogrammi sono: quadrati, rettangoli, rombi, romboidi.
Cosa differenzia un parallelogramma generico (romboide) da un rombo?
Il rombo ha quattro lati uguali mentre il romboide ha due coppie di lati lunghi uguali.
Le diagonali del rombo sono perpendicolari, quelle del romboide no.

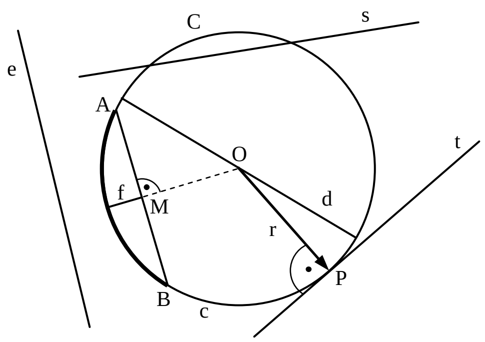
5 Cerchio

5.1 Elementi e parti del cerchio e della circonferenza

Situazione introduttiva

Disegnare tre punti distinti (non allineati) A, B e C e tracciare la circonferenza che passi da A, B e C.

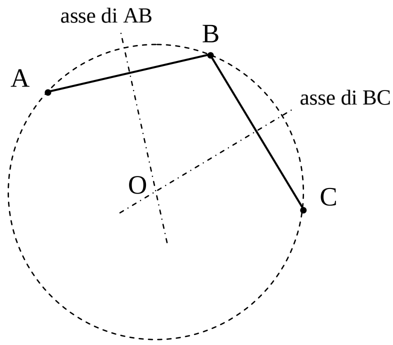
Nella tabella seguente sono indicati denominazioni e simboli riguardanti il cerchio:

Terminologia	**Denominazioni**	**Esempio**
Circonferenza (perimetro)	c	
Cerchio (superficie)	C	
Centro	O	
Raggio	r	
Diametro	d	
Corda	AB	
Punto medio della corda	M	
Arco	AB	
Settore circolare	$A\widehat{OB}$	
Freccia	f	
Retta secante	s	
Retta tangente (nel punto P la retta tangente forma un angolo **retto** con il raggio)	t	
Retta esterna	e	
Punto di tangenza	P	
Punti di intersezione	A, B	

Il **segmento circolare** corrisponde alla superficie compresa tra la corda e l'arco definito dalla corda stessa.

Soluzione

Disegnare tre punti distinti (non allineati) A, B e C e tracciare la circonferenza che passi da A, B e C.



1) Dopo aver disegnato i tre punti A, B e C, si tracciano i segmenti AB e BC (dette “corde”).
2) Si definiscono gli assi dei segmenti AB e BC
   (rette perpendicolari passanti per il punto medio dei rispettivi segmenti).
3) I due assi si intersecano nel punto O (centro della circonferenza).
4) Il raggio della circonferenza vale: R = OA = OB = OC.

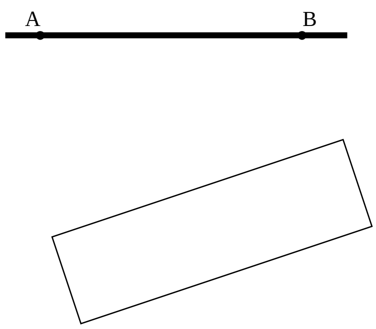
5.2 Angoli interni al cerchio

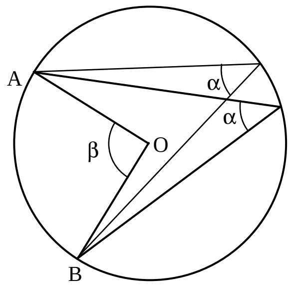
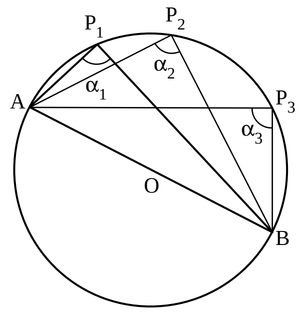
Situazione introduttiva

Supponiamo che un tratto di ferrovia compreso tra due punti A e B debba essere controllato con una telecamera. Le condizioni che devono essere rispettate sono:

- la telecamera deve essere posata all’interno del terreno indicato con il rettangolo;
- la telecamera ha un campo visivo (angolo di apertura) di 60° e deve essere utilizzato completamente, ossia A e B devono essere all’estremità del campo visivo.

Dove si trovano tutti i possibili punti nei quali si potrebbe posare la telecamera?

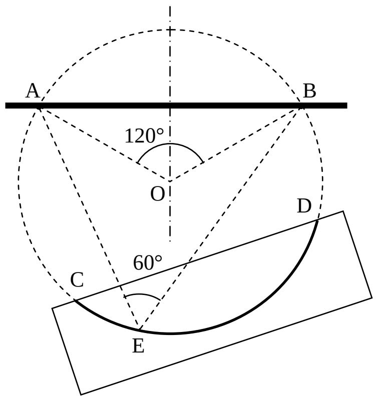


	L’angolo α si dice **angolo alla circonferenza**. L’angolo β si dice **angolo al centro** corrispondente dell’angolo α. $\boxed{\beta = 2\alpha}$
	Gli angoli α_1 , α_2 e α_3 , sono inscritti in una semicirconferenza. Come tali, le loro ampiezze sono la metà di quella dell’angolo al centro, ossia la metà di 180°. Perciò: $\boxed{\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 90°}$ Ogni angolo inscritto in una semicirconferenza è **retto**.

Soluzione

I punti A e B devono trovarsi su una circonferenza e definire un angolo di 60° con il punto in cui verrà posata la telecamera. Si tratta quindi di trovare il centro O della circonferenza in modo tale che esso, con i punti A e B, definisca un angolo di 120°. Si procede quindi nel modo seguente:

1) si traccia l’asse del segmento AB (il centro del cerchio si trova su questo asse);
2) si determina il centro O in modo tale che l’angolo $A\hat{O}B$ sia di 120°;
3) si disegna il cerchio di centro O e di raggio OA oppure OB;
4) l’arco della cironferenza compreso tra C e D determina **l’angolo alla circonferenza** che vale la metà dell’**angolo al centro**, ossia 60°.



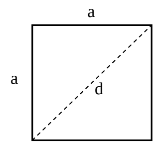
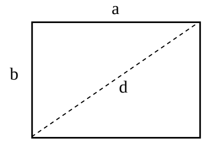
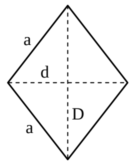
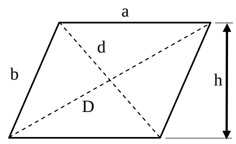
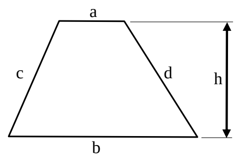
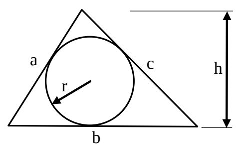
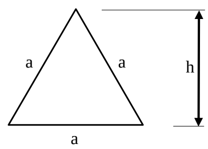
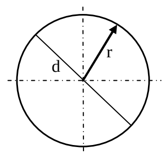
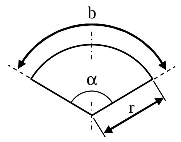
Di conseguenza tutti i punti sulla circonferenza compresi tra C e D (per esempio il punto E) delimitano l’arco sul quale è possibile posare la telecamera soddisfando le condizioni citate: il tratto AB è visto con un angolo di 60° e la telecamera è situata nel terreno indicato.

6 Calcolo di superfici

Domanda introduttiva

E' possibile calcolare la superficie di un triangolo generico conoscendo soltanto la lunghezza dei suoi tre lati?

Ricordiamo nella pagina seguente le principali formule per il calcolo di lunghezze e superfici:

Quadrato	$P = 4 \cdot a$ $A = a^2$ $d = a \cdot \sqrt{2}$	
Rettangolo	$P = 2 \cdot (a + b)$ $A = b \cdot a$ $d = \sqrt{a^2 + b^2}$	
Rombo	$P = 4 \cdot a$ $A = \frac{D \cdot d}{2}$	
Romboide	$P = 2 \cdot (a + b)$ $A = a \cdot h$	
Trapezio	$P = a + b + c + d$ $A = \left(\frac{a + b}{2}\right) \cdot h$	
Triangolo	$P = a + b + c; \quad s = \text{semiperimetro} = \frac{P}{2}$ $A = \frac{b \cdot h}{2} = r \cdot s = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$	
Triangolo equilatero	$P = 3 \cdot a$ $h = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ $A = \frac{a \cdot h}{2} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$	
Cerchio	$c = r \cdot 2 \cdot \pi = d \cdot \pi$ $C = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2}{4} \cdot \pi$	
Settore circolare	$b = r \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^o} = d \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^o}$ $A = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^o} = \frac{d^2}{4} \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^o}$	

Soluzione

E’ possibile calcolare la superficie di un triangolo scaleno conoscendo soltanto la lunghezza dei suoi tre lati?
Sì, utilizzando la seguente formula:

$P = a + b + c; \quad s = \text{semiperimetro} = \frac{P}{2}$.

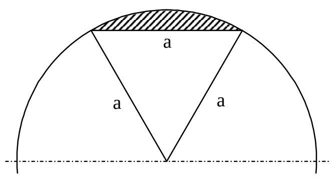
La superficie del triangolo vale quindi:

$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

6.1 Aree di figure riconducibili alla combinazione di aree fondamentali

Situazione introduttiva

Calcolare la superficie della seguente area tratteggiata esprimendo la soluzione in funzione della lettera **a**:

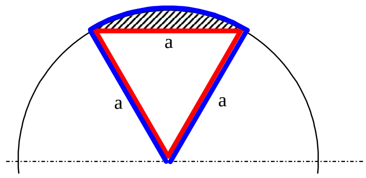


Vediamo alcuni esempi di aree apparentemente difficili da calcolare ma che sono riconducibili alla combinazione di aree fondamentali e, di conseguenza, risolvibili con le formule del paragrafo precedente. Per facilitare la risoluzione, proponiamo il metodo seguente:

1) individuazione delle aree parziali fondamentali;
2) scrittura della formula simbolica generale;
3) calcolo delle aree parziali (semplificare il risultato);
4) calcolo dell’area richiesta.

Nei seguenti esempi, applicheremo il metodo sopraindicato per calcolare la superfici tratteggiate in funzione della lettera *a*.

Esempio 1 (soluzione della situazione introduttiva):



Soluzione:

1) L'area tratteggiata (detta segmento circolare) è la differenza tra il settore circolare blu (di raggio *a* e di angolo 60°) e il triangolo equilatero rosso di lato *a*, quindi:
2) $A_t = A_{\text{⌔}} - A_{\nabla}$
3) Calcoliamo le aree parziali:

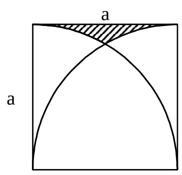
$$A_{\text{⌔}} = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^o} = a^2 \cdot \pi \cdot \frac{60^o}{360^o} = a^2 \cdot \frac{\pi}{6}$$

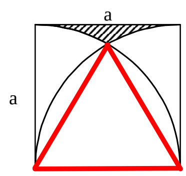
$$A_{\nabla} = \ell^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

L'area tratteggiata vale quindi:

4) $A_t = A_{\text{⌔}} - A_{\nabla} = a^2 \cdot \frac{\pi}{6} - a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = a^2 \cdot \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Esempio 2:





Soluzione:

1) L'area tratteggiata è la differenza tra il quadrato, il triangolo rosso e i due settori circolari, come indicato nella figura accanto, ossia:
2) $A_t = A_{\square} - A_{\Delta} - 2 \cdot A_{\text{⌔}}$
3) Calcoliamo le aree parziali:

$$A_{\square} = \ell^2 = a^2$$

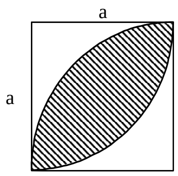
$$A_{\Delta} = \ell^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

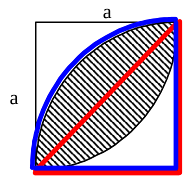
$$A_{\text{⌔}} = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^o} = a^2 \cdot \pi \cdot \frac{30^o}{360^o} = a^2 \cdot \frac{\pi}{12}$$

L'area tratteggiata vale quindi:

4) $A_t = A_{\square} - A_{\Delta} - 2 \cdot A_{\text{⌔}} = a^2 - a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} - 2 \cdot \left(a^2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = a^2 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$

Esempio 3:





Soluzione:

1) L'area tratteggiata è il doppio della differenza tra il settore circolare blu di angolo 90° e il triangolo rettangolo rosso, come indicato nella figura accanto, ossia:

2) $A_t = 2 \cdot \left(A_{\triangledown} - A_{\Delta}\right)$

3) Calcoliamo le aree parziali:

$$A_{\triangledown} = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^o} = a^2 \cdot \pi \cdot \frac{90^o}{360^o} = a^2 \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$A_{\Delta} = \frac{b \cdot h}{2} = a^2 \cdot \frac{1}{2}$$

L'area tratteggiata vale quindi:

4) $A_t = 2 \cdot \left(A_{\triangledown} - A_{\Delta}\right) = 2 \cdot \left(a^2 \cdot \frac{\pi}{4} - a^2 \cdot \frac{1}{2}\right) = a^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = a^2 \cdot \frac{\pi - 2}{2}$

7 Volumi

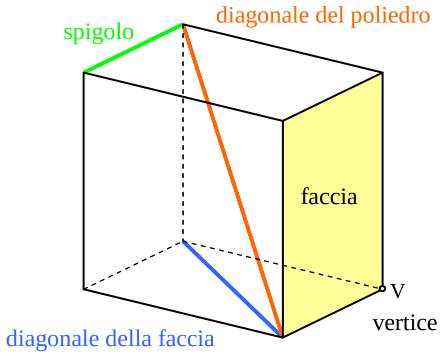
7.1 Definizioni

Un **poliedro** è una figura geometrica delimitata da poligoni (dette **facce del poliedro**) congiunti lungo i lati.
I lati della facce si dicono **spigoli**.
I vertici della facce (per esempio: V) si dicono **vertici**.
L'insieme di tutte le facce si chiama **superficie totale**.
Ogni faccia è costituita da un poligono: se il poligono non è un triangolo, le facce presentano le **diagonali della faccia**.
Le diagonali che congiungono due vertici (situati su due diverse facce) sono le **diagonali del poliedro**.

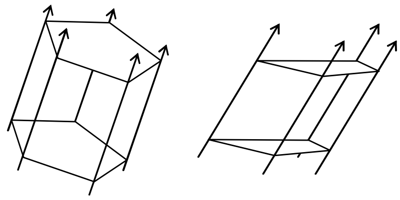
Un poliedro con tutte le facce costituite da poligoni regolari uguali si chiama **poliedro regolare** (es.: cubo, tetraedro, …)

Alcuni poliedri prendono il nome dal numero di facce che possiedono. Esempi:

- **tetraedro** : 4 facce
- **esaedro** : 6 facce
  (oppure **parallelepipedo**; caso particolare : **cubo**)
- **ottaedro**: 8 facce
- **dodecaedro**: 12 facce
- **icosaedro**: 20 facce



Un **prisma** è un solido ottenuto traslando un poligono detto base del prisma. Se la traslazione avviene perpendicolare alla base si tratta di un **prisma retto** altrimenti si parla di **prisma obliquo**. Se il poligono traslato è regolare si tratta di un **prisma regolare**.

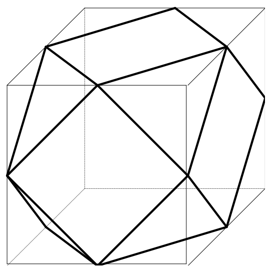


Prisma regolare retto   Prisma obliquo

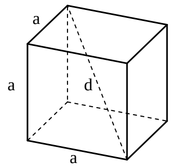
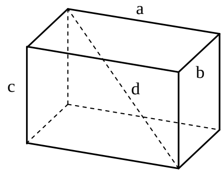
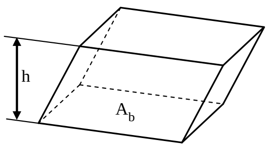
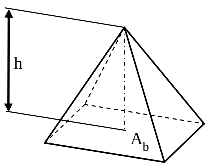
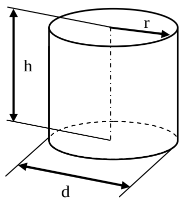
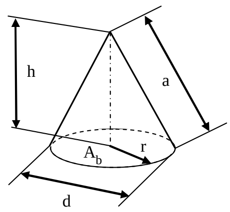
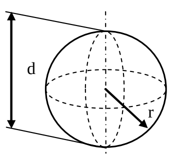
7.2 Calcolo di volumi fondamentali

Situazione introduttiva

Calcolare il volume del solido definito da un cubo di spigolo a, al quale vengono smussati gli otto vertici nel modo indicato:

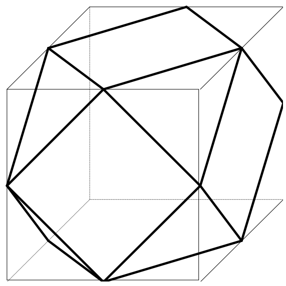


Ricordiamo le principali formule per il calcolo di superfici e volumi dei principali solidi:

Cubo	$A_b = a^2$ $A_t = 6 \cdot a^2$ $d = a \cdot \sqrt{3}$ $V = a^3$	
Parallelepipedo	$A_b = a \cdot b$ $A_t = 2 \cdot (ab + bc + ac)$ $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ $V = a \cdot b \cdot c$	
Parallelepipedo generico	$V = A_b \cdot h$	
Piramide	$A_t = A_b + A_\ell$ $V = \dfrac{A_b \cdot h}{3}$	
Cilindro	$A_b = r^2 \cdot \pi = \dfrac{d^2}{4} \cdot \pi$ $A_\ell = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h = d \cdot \pi \cdot h$ $A_t = 2 \cdot A_b + A_\ell$ $V = A_b \cdot h$	
Cono	$a = \text{apotema} = \sqrt{h^2 + r^2}$ $A_b = r^2 \cdot \pi = \dfrac{d^2}{4} \cdot \pi$ $A\ell = r \cdot \pi \cdot a$ $A_t = A_b + A_\ell$ $V = \dfrac{A_b \cdot h}{3}$	
Sfera	$A_t = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$ $V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$	

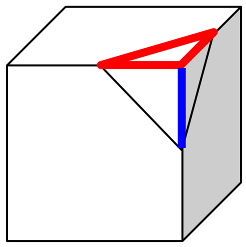
Soluzione

Calcolare il volume del solido definito da un cubo di spigolo *a*, al quale vengono smussati gli otto vertici nel modo indicato:



Si tratta di calcolare il volume di una delle 8 piramidi tolte e sottrarre dal volume del cubo il volume delle 8 piramidi. Come calcolare il volume di una piramide?

Si può prendere in considerazione la figura seguente:



La superficie di base è l'area del triangolo indicato in rosso, l'altezza *h* in blu. Abbiamo:

$$A_b = \frac{\ell \cdot \ell}{2} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} = \frac{\frac{a^2}{4}}{2} = \frac{a^2}{8} \quad \text{inoltre:} \quad h = \frac{a}{2}$$

Il volume di una piramide vale quindi:

$$V_{piramide} = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{\frac{a^2}{8} \cdot \frac{a}{2}}{3} = \frac{a^3}{48}$$

Il volume richiesto risulta allora:

$$V = V_{cubo} - 8 \cdot V_{piramide} = a^3 - 8 \cdot \frac{a^3}{48} = a^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) = a^3 \cdot \frac{5}{6}$$