B) Calcolo letterale

In questo capitolo verranno trattati i seguenti argomenti:

- Regole di scrittura e terminologia dell'algebra (variabile, costante, espressione, somma algebrica, monomio, polinomio, …)
- Operazioni algebriche di base con monomi e polinomi (regole di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevazione a potenza applicando le proprietà commutativa, associativa, distributiva)
- Prodotti notevoli (moltiplicazione tra polinomi, fattorizzazione)
- Scomposizione in fattori (scomposizione di polinomi mediante le tecniche di messa in evidenza, raccoglimenti parziali, uso dei prodotti notevoli, trinomio tipico)
- Frazioni algebriche (semplificazioni, operazioni con le frazioni algebriche, frazioni a termini frazionari, razionalizzazione dei denominatori)
- Terminologia e regole di risoluzione delle equazioni (uguaglianza, equazione, identità, principio della bilancia)
- Equazioni intere
- Equazioni fratte (condizioni di esistenza)
- Equazioni letterali (formule)
- Sistemi di equazioni (metodi di risoluzione)
- Risoluzione di problemi (messa in equazione: matematizzazione)

1 Introduzione

Domanda introduttiva

Come si può scrivere con simboli matematici che l'area di un trapezio è data dalla lunghezza media delle sue basi (dette, rispettivamente, base maggiore e base minore) moltiplicata per l'altezza?

Il calcolo letterale (o calcolo algebrico) è uno strumento matematico che permette di generalizzare la descrizione di situazioni reali utilizzando le lettere (formule) che verrano sostituite da valori numerici. Per esempio, se vogliamo descrivere la relazione tra area, base e altezza di un triangolo, scriveremo:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}.$$

A partire da questa formula sarà possibile calcolare l'area di qualsiasi triangolo: infatti, a dipendenza dei valori numerici di b (base) e h (altezza), basterà inserire al posto delle lettere i valori numerici che ci interesseranno per calcolare l'area.

Per utilizzare correttamente il linguaggio letterale è necessario fissare alcune regole.

Regole di scrittura	**Spiegazioni**
$a \times b = a \cdot b = a\ b = ab$	Il segno x viene sostituito con il punto. Se non ci sono ambiguità anche il punto o lo spazio possono essere tralasciati.
$a : b = a/b = \frac{a}{b}$	La divisione può essere scritta nei modi indicati.
$(-5) \cdot a = -5a$	Normalmente la scrittura utilizzata è quella a destra. In alcuni casi bisogna ricordarsi di quanto sta scritto a sinistra, per esempio nel calcolo con le potenze: $-5a^2 = (-5) \cdot a^2$, da non confondere con: $(-5a)^2 = [(-5) \cdot a]^2 = (-5)^2 \cdot a^2 = 25a^2$. Oppure: $(-x)^2 = [(-1) \cdot x]^2 = (-1)^2 \cdot x^2 = x^2$.
$n \cdot a = a + a + a + \ldots$ (n volte)	Il coefficiente numerico indica quante volte viene effettuata la **somma** della lettera indicata, per esempio: $1a = a$; $2a = a + a$; $3a = a + a + a$.
$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots$ (n volte)	Il valore dell'esponente indica quante volte viene effettuata la **moltiplicazione** della lettera indicata, per esempio: $a^1 = a$; $a^2 = a \cdot a$; $a^3 = a \cdot a \cdot a$.
$a = 1 \cdot a = a^1 = \frac{a}{1}$	Normalmente si utilizza la scrittura a sinistra. In determinate operazioni può essere utile ricordare le altre tre forme. Per esempio: 1) $a \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^1 \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{1+\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{2}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$ 2) $\frac{\frac{1}{b}}{a} = \frac{\frac{1}{b}}{\frac{a}{1}} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a \cdot b}$

Nella tabella seguente vengono riassunti i termini usati comunemente nell'ambito del calcolo letterale. L'intenzione è quella di presentare in modo compatto il vocabolario già utilizzato nelle scuole precedenti e che si incontrerà anche nei prossimi capitoli:

Terminologia	Significato	Esempi
variabile	lettera che può assumere **diversi valori** (può rappresentare qualsiasi elemento di un dato insieme)	$a, b, c, m, \ldots (\in \mathbf{R})$ oppure $a \in \mathbf{N}$
costante	lettera che sostituisce un **valore fisso** (può rappresentare un singolo elemento di un insieme)	$\pi\ (= 3{,}14\ldots)$
espressione algebrica	espressione formata da una qualsiasi combinazione di numeri e lettere, connessi tra loro da operazioni matematiche	$2x - 3y + 1;\quad \frac{5x^3 - 1}{4xy + 1};$ $R^2 \cdot \pi \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$
somma algebrica	espressione algebrica formata da parti collegate tra loro mediante segni di **addizione e/o sottrazione**	$3x - 2y + 4z$
equazione algebrica	uguaglianza tra due espressioni algebriche, le cui variabili possono assumere solo determinati valori	$A = \frac{B + b}{2} \cdot h$
termine	singolo elemento di una somma algebrica costituito da **segno algebrico**, **coefficiente** e **parte letterale:** tra le lettere compaiono solo moltiplicazioni e potenze (gli esponenti delle lettere sono numeri interi positivi)	$-2x;\quad 6xy;\quad 3a^5b^3$
termini simili	termini con la **stessa parte letterale**	$3xy;\quad -2xy;\quad 45xy$
monomio	sinonimo di **termine**	$-2x;\quad 6xy;\quad 3a^5b^3$
forma normale monomio	coefficienti e parti letterali corrispondenti unificate (monomio **ridotto**)	$-2ab^2 3b^3 a^2 = -6a^3b^5$
binomio	somma algebrica composta da **due termini**	$(a + b);\quad (2x - 3y)$
polinomio	somma algebrica di **più termini**	$3x^2 - 2x + 6$
forma normale polinomio	polinomio **ridotto**	$6a^4b^2 - 3a^3b^5 + 2a^4b^2 = 8a^4b^2 - 3a^3b^5$
grado del polinomio	il grado di un polinomio rispetto a una lettera è il maggiore degli esponenti rispetto a tale lettera	$3x^2 - 2x + 6$ è un polinomio in x, di 2. grado
uguaglianza	caratterizzata dal seguente simbolo: =	$6xy = 5z + 2y$ x = 3 si puó scrivere: 3 = x
equazione	uguaglianza con soluzioni determinate (le soluzioni si chiamano anche **radici**, ossia valori che verificano l'equazione)	$x^2 - x = 3x \quad \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4$
identità	uguaglianza per la quale è possibile sostituire l'incognita con qualsiasi valore (corrisponde a un'equazione indeterminata)	$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 \quad \Rightarrow x \in \mathbf{R}$

Esempio:

Polinomio di 4 grado nella variabile x:

Grado del polinomio

Parte letterale del termine

Coefficiente dominante

$$4x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5$$

Monomio o termine

Coefficiente del termine

Forma generale di un polinomio in x:	
$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_o$	Oppure: $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$

Esempio:

$P(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 6$

- Grado del polinomio: 3
- Coefficiente dominante: $a_3 = 1$

Soluzione

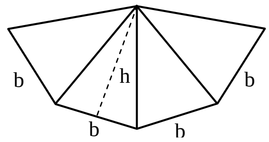
Come si può scrivere con simboli matematici che l'area di un trapezio è data dalla lunghezza media delle sue basi (dette, rispettivamente, base maggiore e base minore) moltiplicata per l'altezza?

Nel modo seguente: $A = \frac{B+b}{2} \cdot h$

2 Operazioni algebriche di base

Situazione introduttiva

Una piazza è composta da quattro triangoli uguali, di cui non si conoscono le dimensioni, ma unicamente le lettere che rappresentano le basi e le altezze. Si desidera quindi esprimere la formula della superficie totale della piazza utilizzando le lettere al posto dei numeri:



Vediamo subito la soluzione:

$$A_{tot} = A_{triangolo} + A_{triangolo} + A_{triangolo} + A_{triangolo} = \left(\frac{b\cdot h}{2}\right)+\left(\frac{b\cdot h}{2}\right)+\left(\frac{b\cdot h}{2}\right)+\left(\frac{b\cdot h}{2}\right)$$

Semplifichiamo la nostra formula:

$$A_{tot} = \left(\frac{b\cdot h}{2}\right)+\left(\frac{b\cdot h}{2}\right)+\left(\frac{b\cdot h}{2}\right)+\left(\frac{b\cdot h}{2}\right) = 4\cdot\left(\frac{b\cdot h}{2}\right) = \frac{4}{2}\cdot(b\cdot h) = 2\cdot(b\cdot h) = 2bh$$

Queste trasformazioni rappresentano un'applicazione del calcolo algebrico con i monomi.

La conoscenza delle operazioni con monomi e polinomi permette la risoluzione delle equazioni che sono una delle principali applicazioni del calcolo algebrico.

2.1 Operazioni con monomi

Operazione algebrica	**Esempi**
Riduzione a **forma normale**.	$-2ab^2 3b^3 a^2 = -2\cdot 3\cdot a\cdot a^2\cdot b^2\cdot b^3 = -6\cdot a^{1+2}\cdot b^{2+3} = -6a^3b^5$
Per eseguire la **somma** di monomi (la **sottrazione** non è nient'altro che la somma di termini opposti) è necessario che i termini siano simili.	$5ab + 6a =$ non possono essere sommati (i termini non sono simili) invece: $4a^2b - 8a^2b + 6a^2b = 2a^2b$
La **moltiplicazione** tra monomi viene effettuata utilizzando le proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione e le proprietà delle potenze.	$-2y\cdot 4x^2y\cdot 3xy^2 = -2\cdot 4\cdot 3\cdot x^2\cdot x\cdot y\cdot y\cdot y^2 = -24\cdot x^{2+1}\cdot y^{1+1+2} = -24x^3y^4$
La divisione tra monomi è possibile solo se il risultato soddisfa la definizione di monomio, ossia il risultato deve essere costituito da un termine con un **segno algebrico**, un **coefficiente** e una **parte letterale**: tra le lettere compaiono solo moltiplicazioni e potenze (gli esponenti delle lettere sono numeri naturali positivi).	$-8m^3n^2 : 4mn = (-8\cdot m^3\cdot n^2):(4\cdot m\cdot n) =$ $= (-8:4)\cdot(m^3:m)\cdot(n^2:n) = -2\cdot m^{3-1}\cdot n^{2-1} = -2m^2n$ invece: $-8m^3n^2 : 4mn^3 = (-8\cdot m^3\cdot n^2):(4\cdot m\cdot n^3) =$ $= (-8:4)\cdot(m^3:m)\cdot(n^2:n^3) = -2\cdot m^{3-1}\cdot n^{2-3} = -2m^2n^{-1}$ il risultato non è un monomio (le potenze della parte letterale devono essere numeri naturali)
Per effettuare **l'elevazione a potenza** applicare le proprietà delle potenze.	$(-2a^2b^3)^2 = (-2\cdot a^2\cdot b^3)^2 = (-2)^2\cdot(a^2)^2\cdot(b^3)^2 = 4\cdot a^{2\cdot 2}\cdot b^{3\cdot 2} = 4a^4b^6$

2.2 Operazioni con i polinomi:

Ricordiamo le principali operazioni con i polinomi:

Operazioni algebriche	**Esempi**
Riduzione a **forma normale**.	$6a^4b^2 - 3a^3b^5 + 2a^4b^2 = 8a^4b^2 - 3a^3b^5$
Per eseguire la **somma algebrica** di polinomi si raggruppano i termini simili, in base alla proprietà commutativa e associativa.	$(2x^2 + 7x - 5) + (3x^2 - 11x + 8) =$ $= (2x^2 + 3x^2) + (7x - 11x) + (-5 + 8) = 5x^2 - 4x + 3$
Sottrazione di una somma algebrica	$-(3x^2 - 4x + 5) = -3x^2 + 4x - 5$. Ecco la spiegazione: $-(3x^2 - 4x + 5) = (-1)\cdot(3x^2 - 4x + 5) =$ $(-1)\cdot(3x^2) - (-1)\cdot(4x) + (-1)\cdot(5) = -3x^2 + 4x - 5$
Per **moltiplicare** fra loro i polinomi si fa uso della proprietà distributiva e associativa della moltiplicazione unitamente alle proprietà delle potenze.	$(x^4 - 5x^2 + 7)\cdot(3x^2 + 2) = (x^4 - 5x^2 + 7)\cdot(3x^2) + (x^4 - 5x^2 + 7)\cdot(2) =$ $= (3x^6 - 15x^4 + 21x^2) + (2x^4 - 10x^2 + 14) =$ $= 3x^6 - 13x^4 + 11x^2 + 14$
La **divisione** tra polinomi viene effettuata con lo stesso principio della divisione numerica, che ricordiamo con l'esempio seguente: 679 : 24 = 28 – (48) ------ 199 – (192) ------ Resto 7 67 : 24 = 2,.. 199 : 24 = 8,.. Verifica: $28 \cdot 24 + 7 = 679$	$(12y^3 - 38y + 36y^2 + 42) : (8 + 2y) =$ Dapprima si devono riscrivere i polinomi con le potenze della variabile in ordine decrescente (inoltre si potrebbe semplificare per 2): $(12y^3 + 36y^2 - 38y + 42) : (2y + 8) =$ In seguito si procede nel modo seguente: $(12y^3 + 36y^2 - 38y + 42) : (2y + 8) = 6y^2 - 6y + 5$ $-(12y^3 + 48y^2)$ ------ --------- ------ ------ $0 \quad -12y^2 \quad -38y \quad +42$ $-(-12y^2 \quad -48y)$ --------- ------- ------ $0 \quad 10y \quad +42$ $-(10y \quad +40)$ ------- ------ Resto : 0 2 $12y^3 : 2y = 6y^2$ $-12y^2 : 2y = -6y$ $10y : 2y = 5$ Verifica: $(6y^2 - 6y + 5)\cdot(2y + 8) + 2 = (12y^3 + 36y^2 - 38y + 42)$
L'elevazione a potenza può essere effettuata applicando le regole della moltiplicazione. Oppure (vedi paragrafo seguente: "i prodotti notevoli"), si possono utilizzare altre tecniche.	$(3x + 2)^2 = (3x + 2)\cdot(3x + 2) = 9x^2 + 6x + 6x + 4 = 9x^2 + 12x + 4$

3 Prodotti notevoli

Situazione introduttiva

1) Come risolvere direttamente, senza applicare la proprietà distributiva, $(3x+2)^2$?
2) Come si può semplificare la seguente frazione: $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}$?

Alcuni prodotti tra polinomi si presentano molto frequentemente. Invece di effettuare ogni volta la moltiplicazione applicando le proprietà distributiva e associativa, si può giungere più velocemente al risultato se si conoscono i seguenti **prodotti notevoli** (identità):

1) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
2) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
3) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
4) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
5) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$
6) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
7) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Ricordiamo che le lettere a e b sono lettere qualsiasi. Esse permettono di generalizzare i prodotti notevoli sostituendo lettere, numeri o espressioni. In effetti i prodotti notevoli potrebbero essere descritti anche con simboli qualsiasi. Per esempio, il prodotto notevole 1) diventerebbe:

$$(\Delta+O)\cdot(\Delta-O)=\Delta^2-O^2 .$$

E'molto importante saper passare da una forma all'altra (somma algebrica $\leftrightarrow$ prodotto). Queste operazioni sono chiamate **sviluppo** di un prodotto, rispettivamente **fattorizzazione** di una somma algebrica.

Prodotto notevole		**Forma esponenziale**		**Somma algebrica**
$(a+b)\cdot(a+b)$	=	$(a+b)^2$	=	$a^2+2ab+b^2$
$(a-b)\cdot(a-b)$	=	$(a-b)^2$	=	$a^2-2ab+b^2$
$(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$	=	$(a+b)^3$	=	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a-b)\cdot(a-b)\cdot(a-b)$	=	$(a-b)^3$	=	$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$(a+b)\cdot(a-b)$	=	impossibile	=	a^2-b^2
$(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)$	=	impossibile	=	a^3+b^3
$(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$	=	impossibile	=	a^3-b^3
impossibile		impossibile		a^2+b^2
Prodotto notevole		$\xrightarrow{\text{sviluppo}}$ $\xleftarrow[\text{fattorizzazione}]{}$		Somma algebrica

Attenzione: a^2+b^2 non si può fattorizzare! In ogni caso $a^2+b^2 \neq (a+b)^2$

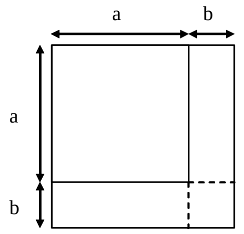
I prodotti notevoli possono essere dimostrati eseguendo la moltiplicazione e semplificando i risultati, oppure in modo geometrico come indicato nell'esempio seguente:

La superficie totale di un quadrato di lato (a + b) vale:

A = (a + b)·(a + b) = $(a + b)^2$ 1)

ma corrisponde anche alla somma delle 4 aree parziali:

A = $a^2 + b^2 + a\cdot b + a\cdot b = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$ 2)



Di conseguenza:
1) = 2) : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Ecco alcuni esempi:

$$a)\quad (3x-2y)(3x+2y)=(3x)^2-(2y)^2=9x^2-4y^2$$

$$b)\quad (7x^2+3y^3)^2=(7x^2)^2+2(7x^2\cdot 3y^3)+(3y^3)^2=49x^4+42x^2y^3+9y^6$$

$$c)\quad [(3a-2)+b]\cdot[(3a-2)-b]=(3a-2)^2-b^2=9a^2-12ab+4-b^2$$

$$d)\quad (x^4-1)=(x^2-1)\cdot(x^2+1)=(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)$$

Soluzioni

1) $(3x+2)^2$ è un'espressione del tipo: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, quindi:
$(3x+2)^2=(3x)^2+2\cdot(3x)\cdot(2)+(2)^2=9x^2+12x+4$

2) $$\frac{a^2-b^2}{a-b}=\frac{(a+b)\cdot(a-b)}{a-b}=a+b$$

4 Scomposizione in fattori

Situazioni introduttive

Come ritrovare i prodotti che danno la somma indicata?

1) $9x^2 + 12x + 4 = ?$ 2) $x^2 - 2x + 1 = ?$

Come semplificare le seguenti frazioni:

3) $\dfrac{2a + 2b}{a + b} = ?$ 4) $\dfrac{a^2 - 2ab + b^2}{a - b} = ?$

Calcolare le soluzioni della seguente equazione: 5) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = ?$

Quando due o più espressioni algebriche sono moltiplicate fra di loro, ciascuna di esse prende il nome di **fattore**. Spesso, trattando prodotti già sviluppati (cioè delle somme algebriche) si ha la necessità di individuare i fattori originali, per esempio per semplificare una frazione o per risolvere un'equazione. Il processo utilizzato nella ricerca di tali fattori viene detto **scomposizione in fattori** (**fattorizzazione**). Si tratta del procedimento inverso dello sviluppo di un polinomio.

Vediamo alcune tecniche di scomposizione in fattori:

Tecniche di scomposizione	**Esempi**
1) **Raccoglimento a fattore comune** (**messa in evidenza**)	$6a + 2ab = 2a(3 + b)$
2) **Raccoglimento parziale**	$ax + ay - bx - by = a(x + y) - b(x + y) = (x + y)(a - b)$
3) **Scomposizione tramite i prodotti notevoli** (vedi paragrafo precedente)	$81b^4 - 1 = (9b^2 - 1)(9b^2 + 1) = (3b - 1)(3b + 1)(9b^2 + 1)$
4) **Trinomio tipico:** $(x + a) \cdot (x + b) = x^2 + (a + b) \cdot x + a \cdot b$	prodotto $x^2 - x - 6 = (x - 3) \cdot (x + 2)$ somma

Soluzioni

1) $9x^2 + 12x + 4$ è del tipo: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$, quindi: $9x^2 + 12x + 4 = (3x+2)^2$

2) $x^2 - 2x + 1$ è del tipo: $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$, quindi: $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

3) $\dfrac{2a+2b}{a+b} = \dfrac{2(a+b)}{a+b} = 2$

4) $\dfrac{a^2 - 2ab + b^2}{a-b} = \dfrac{(a-b)^2}{a-b} = a - b$

5) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2(x+2) - (x+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+2)(x^2-1) = 0$

Da cui si ricavano le tre soluzioni: $(x+2)(x+1)(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2;\ x = -1;\ x = 1$

5 Frazioni algebriche

Situazioni introduttive

Risolvere le seguenti operazioni con le frazioni algebriche:

a) $\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=?$ b) $\dfrac{cd-c^2}{c^2-d^2}=?$ c) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=?$ d) $\dfrac{4+x}{2}=?$

Una frazione algebrica è una frazione cha ha dei polinomi al numeratore e/o al denominatore. Il polinomio al denominatore **non può essere uguale a 0**. Per esempio:

$\dfrac{2x+3}{x-5}$ non ammette che al posto della variabile x si possa inserire il numero 5 (impossibile dividere per 0). In questo caso si dice che la frazione ha come **condizioni di esistenza** (o anche **condizioni iniziali** o **valori eccezionali**) C.E.: $x \neq 5$. E'possibile **semplificare** le frazioni algebriche soltanto se al numeratore e al denominatore si possono evidenziare dei fattori comuni.

Regola	Esempi
$\dfrac{p\cdot k}{q\cdot k}=\dfrac{p}{q}$	1) $\dfrac{2a}{8}=\dfrac{2\cdot a}{2\cdot 4}=\dfrac{a}{4}$ 2) $\dfrac{2x-4}{2}=\dfrac{2(x-2)}{2}=x-2$ 3) $\dfrac{a^2-b^2}{(a+b)^2}=\dfrac{(a+b)\cdot(a-b)}{(a+b)\cdot(a+b)}=\dfrac{a-b}{a+b}$

Il fattore comune k può rappresentare **un'intera espressione numerica**, **un'espressione algebrica** oppure un **numero**. In tutti i casi: $k \neq 0$!

La frazione semplificata il più possibile si dice ridotta ai **minimi termini**.

L'operazione inversa si dice **amplificazione** (serve, per esempio, per determinare i denominatori comuni nel caso di una somma di frazioni).

5.1 Operazioni con le frazioni algebriche

Operazione	Regole	Esempi
addizione	$\frac{p}{q}+\frac{r}{q}=\frac{p+r}{q}$ $\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{ps}{qs}+\frac{rq}{qs}=\frac{ps+rq}{qs}$	$\frac{1}{a}+\frac{3}{a}=\frac{4}{a}$ (C.E.: $a\neq 0$) $\frac{1}{6b}+\frac{-2}{3b}+\frac{1}{2b}=\frac{1+(-2)\cdot 2+1\cdot 3}{6b}=\frac{0}{6b}$ (C.E.: $b\neq 0$)
sottrazione	$\frac{p}{q}-\frac{r}{q}=\frac{p-r}{q}$ $\frac{p}{q}-\frac{r}{s}=\frac{ps}{qs}-\frac{rq}{qs}=\frac{ps-rq}{qs}$	$\frac{2+x}{m}-\frac{3-2x}{m}=\frac{(2+x)-(3-2x)}{m}=\frac{2+x-3+2x}{m}=\frac{3x-1}{m}$ (C.E.: $m\neq 0$) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{x^2+2x+1-(x^2-2x+1)}{x^2-1}=$ $=\frac{x^2+2x+1-x^2+2x-1}{x^2-1}=\frac{4x}{x^2-1}$ (C.E.: $x\neq\pm 1$)
moltiplicazione	$\frac{p}{q}\cdot r=\frac{pr}{q}$ $\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}=\frac{pr}{qs}$	$\frac{3}{d}\cdot 4=\frac{12}{d}$ (C.E.: $d\neq 0$) $\frac{a^3-b^3}{a-b}:\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a-b}\cdot\frac{(a-b)^2}{a^2+ab+b^2}=$ $=(a-b)^2$ (C.E.: $a\neq\pm b$)
divisione	$\frac{p}{q}:r=\frac{p}{qr}$ $\frac{p}{q}:\frac{r}{s}=\frac{p}{q}\cdot\frac{s}{r}=\frac{ps}{qr}$	$\frac{6}{b}:2=\frac{6}{2b}=\frac{3}{b}$ (C.E.: $b\neq 0$) $\frac{t^4-16}{(t-2)^2}:\frac{4+t^2}{t-2}=\frac{(t^2-4)(t^2+4)}{(t-2)^2}\cdot\frac{(t-2)}{4+t^2}=\frac{t^2-4}{t-2}=$ $=\frac{(t+2)(t-2)}{t-2}=t+2$ (C.E.: $t\neq 2$)

5.2 Frazioni algebriche a termini frazionari

Una frazione algebrica che contiene al numeratore e/o al denominatore una o più frazioni algebriche viene chiamata frazione algebrica a **termini frazionari**.

Regola	Esempio
$\frac{\frac{p}{q}}{\frac{r}{s}}=\frac{p}{q}:\frac{r}{s}=\frac{p}{q}\cdot\frac{s}{r}=\frac{ps}{qr}$	$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}:\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

Per esempio $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}$ è una frazione algebrica a termini frazionari e si risolve così:

Abbiamo: C.E.: $x \neq 0 \quad \text{inoltre}: \quad x-\frac{1}{x} \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1$

La soluzione è: $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}} = \dfrac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x^2-1}{x}} = \dfrac{x+1}{\cancel{x}} \cdot \dfrac{\cancel{x}}{x^2-1} = \dfrac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{1}{x-1}$

5.3 Razionalizzazione del denominatore

Talvolta è più facile trattare le frazioni contenenti radicali se questi non compaiono al denominatore. Il procedimento che permette di ottenere frazioni senza radicali al denominatore si dice **razionalizzazione del denominatore**. In pratica si procede nel modo seguente:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ La frazione viene amplificata per $\sqrt{5}$

b) $\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} = \dfrac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \dfrac{x-6\sqrt{x}+9}{x-9}$ La frazione viene amplificata utilizzando il prodotto notevole $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

c) $\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{x}} = \dfrac{1}{1-\sqrt[3]{x}} \cdot \dfrac{1+\sqrt[3]{x}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{1+\sqrt[3]{x}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} = \dfrac{1+\sqrt[3]{x}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{1-x}$ La frazione viene amplificata utilizzando il prodotto notevole $(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

Soluzioni

a) $\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{x+1}{x-2} \qquad (\text{C.E.}: \quad x \neq 2)$

b) $\dfrac{cd-c^2}{c^2-d^2} = \dfrac{c(d-c)}{(c-d)(c+d)} \cdot \dfrac{-1}{-1} = \dfrac{c(c-d)}{(c-d)(-c-d)} = \dfrac{c}{-c-d} = -\dfrac{c}{c+d} \qquad (\text{C.E.}: \quad c \neq -d)$

c) $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1\cdot(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{1\cdot(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{2}{(x^2-1)} \qquad (\text{C.E.}: \quad x \neq \pm 1)$

d) $\dfrac{4+x}{2} = \dfrac{4+x}{2} \qquad (\text{non si può semplificare!})$

6 Equazioni di primo grado

Situazioni introduttive

Risolvere le seguenti equazioni:

1) $(2x+3)(6x-1)-9=15x^2-(3x-2)(x-2)$

2) $\dfrac{1}{x(x-1)}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x-1}$

3) $\dfrac{4}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{5x-6}{x^2-4}$

Le equazioni consistono in un'uguaglianza tra due espressioni algebriche per la quale si cercano i valori da attribuire a una o più lettere in modo tale che la verifichino. Le equazioni daranno la possibilità di risolvere i problemi che si incontreranno in ambito professionale e nei corsi di MPT.

Le equazioni possono essere classificate nel modo seguente:

Rispetto…	Denominazione: equazione …	Esempi:
… al **numero di incognite**	… a 1 incognita … a 2 incognite … a 3 incognite	$x+5=6$ $x+y=10$ $x+y+z=6$
… ai **termini**	… intera … fratta o frazionaria	$2x+5=6x-3$ $\frac{3x-1}{x}+\frac{5}{x-1}=0$
… ai **coefficienti**	… numerica … letterale	$4x(x+2)=0$ $3ax+2=5-2a$
… al tipo di **soluzioni**	… determinata … indeterminata … impossibile	$3x=6 \Rightarrow x=2$ $0x=0 \Rightarrow x\in\mathbf{R}$ $x^2+1=x^2 \Rightarrow$ non ci sono soluzioni
… all'**operazione** indicata dall'incognita	… di primo grado … di secondo grado … di grado superiore … irrazionale … esponenziale … logaritmica … trigonometrica …	$4x-2=0$ $x^2=9$ $x^4+2x^3-x^2=2x$ $\sqrt{x}+2=4$ $2^x=16$ $\log(x)=2$ $\cos(x)=\frac{1}{2}$ …

Vediamo qui di seguito i principali termini utilizzati nell'ambito delle equazioni:

Terminologia	**Definizione**	**Esempi**
Uguaglianza	Caratterizzata dal simbolo: =	$2ab+5=3x-4$ oppure $6+3=5+4$
Equazione	Uguaglianza tra due espressioni (chiamate **membri** dell'equazione) contenente una variabile detta **incognita** (generalmente si utilizzano le ultime lettere dell'alfabeto: x, y, z, … oppure, meglio ancora, le lettere corrispondenti alle grandezze in gioco).	$x^2-x=3x$ oppure $s=v\cdot t$
Equazione letterale	Equazione contenente, oltre all'incognita, altre lettere che svolgono il ruolo di costanti (generalmente si utilizzano le prime lettere dell'alfabeto: a, b, c, …).	$ax+b=0$
Risolvere un'equazione	Determinare tutte le soluzioni dell'equazione.	Per risolvere $(x+1)(x-2)=0$ si uguaglia ciascun membro a 0: $(x+1)=0$ da cui $x=-1$ $(x-2)=0$ da cui $x=2$.
Soluzioni o **radici** dell'equazione	Valori numerici che sostituiti all'incognita **risolvono** (si dice anche: **verificano** o **soddisfano**) l'equazione.	Soluzioni o radici di $x^2=4$ sono: $x=2$ e $x=-2$. Infatti: $2^2=4$ e $(-2)^2=4$
Soluzioni estranee	Quando l'incognita può assumere solo determinati valori ma che però non possono essere accettati perché rendono l'equazione iniziale impossibile.	$\frac{3x}{x-2}=\frac{x+4}{x-2}$; C.E.: $x\neq 2$ $3x=x+4$ $x=2\Rightarrow$ soluzione estranea
Equazioni **equivalenti**	Equazioni che hanno la stessa soluzione.	$2x=4$ e $4x=8$
Equazioni di **primo grado** (anche equazioni lineari)	Equazioni che possono essere scritte nella forma: $ax+b=0$.	$2x-4=0$
Equazione …	… **determinata:** x assume solo determinati valori in un determinato insieme numerico;	$x+4=6\Rightarrow x=2$
	… **indeterminata:** x può assumere qualsiasi valore;	$x+4=\frac{2x+8}{2}\Rightarrow 0x=0$
	… **impossibile:** x non può assumere nessun valore in un determinato insieme numerico (per esempio: $2x=5$ è un'equazione impossibile in **N** e **Z** ma è determinata in **Q** e **R**: $x=2{,}5$).	$x+4=x+6\Rightarrow 0x=2$
Identità	Uguaglianza soddisfatta da qualsiasi sostituzione (equazione indeterminata).	$(x+1)^2=x^2+2x+1\quad\Rightarrow x\in\mathbf{R}$

Per risolvere un’equazione è necessario **isolare** l’incognita (isolare significa lasciare l’incognita, a sinistra o a destra dell’uguale, da sola). Si tratta quindi di procedere nel modo seguente: si parte dall’equazione iniziale e si individuano, in successione, equazioni equivalenti in modo da giungere all’equazione che presenta l’incognita isolata e uguagliata ad un’espressione priva dell’incognita stessa.
Si può trasformare un’equazione in un’altra ad essa equivalente considerando il **principio della “bilancia”** (due membri di un’equazione sono paragonabili al contenuto di due piatti di una bilancia che rimane in equilibrio se l’operazione che si fa da una parte la si fa anche dall’altra). Per esempio è possibile:

1)	addizionare o sottrarre la stessa quantità ad ambo i membri dell’equazione;
2)	moltiplicare o dividere i membri dell’equazione per la stessa quantità diversa da 0;
3)	semplificare uno o entrambi i membri dell’equazione;
4)	scambiare fra di loro i due membri dell’equazione;
5)	elevare entrambi i membri alla stessa potenza (attenzione alle potenze pari!).
6)	…

Suggerimento: nella risoluzione di un’equazione complicata, può essere utile **scrivere** l’operazione matematica effettuata durante i diversi passaggi successivi. Lo scopo è quello di riflettere in modo più approfondito sull’operazione scelta e di evitare (spesso) errori di calcolo.

Ricordiamo infine la legge dell’annullamento (se $a \cdot b = 0$ allora le soluzioni sono $a = 0$ e $b = 0$). Se per esempio è necessario risolvere un’equazione del tipo: $x^2 + x = 6$, procederemo così:

$x^2 + x = 6$

$x^2 + x - 6 = 0$

$(x-2)(x+3) = 0$

Le due soluzioni sono quindi: $x = 2$, $x = -3$.

6.1 Equazioni intere

Le equazioni numeriche intere sono le equazioni a coefficienti numerici in cui **l’incognita non è presente in alcun denominatore** (il termine intero è riferito all’incognita e non ai coefficienti, i quali possono essere frazionari).

Per esempio: $\frac{1}{2}x - 3 = \frac{1}{5}$ è un’equazione intera.

Normalmente si moltiplica tutta l’equazione per il m.c.m., togliendo così i denominatori:

$\frac{1}{2}x - 3 = \frac{1}{5}$	si moltiplica per il m.c.m. di 2 e 5, ossia 10
$5x - 30 = 2$	si aggiunge 30
$5x = 32$	si divide per 5
$x = \frac{32}{5}$	

6.2 Equazioni fratte

Un'equazione è fratta se **l'incognita compare in almeno un denominatore**.

Esempio: $\dfrac{2}{x^2-x}-\dfrac{4}{x^2-1}=\dfrac{1}{x^2+x}$

Prima di risolvere un'equazione fratta, dobbiamo determinare le **condizioni di esistenza** delle frazioni algebriche presenti, ossia i valori che l'incognita non potrà assumere.
Poi si può procedere alla risoluzione. La soluzioni trovata sarà accettabile se rispetta le condizioni di esistenza.

Il procedimento di risoluzione può essere riassunto nel modo seguente:

- prima di incominciare la risoluzione determinare (e scrivere) le condizioni di esistenza;
- determinare il più piccolo denominatore comune;
- moltiplicare tutti i membri delle equazioni per il denominatore comune e semplificare;
- risolvere l'equazione;
- verificare il risultato (consultare le condizioni di esistenza).

Esempio: $\dfrac{2}{x^2-x}-\dfrac{4}{x^2-1}=\dfrac{1}{x^2+x}$

Riscriviamo l'equazione fattorizzando i denominatori: $\dfrac{2}{x(x-1)}-\dfrac{4}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{1}{x(x+1)}$

Le due frazioni hanno significato solo se: $x \neq 0$, $x+1 \neq 0$ e $x-1 \neq 0$.
Infatti le condizioni di esistenza sono **C.E.** : $x \neq 0$ e $x \neq \pm 1$.

Risolviamo l'equazione:

$\dfrac{2}{x(x-1)}-\dfrac{4}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{1}{x(x+1)}$	moltiplichiamo i due membri per il m.c.m.: $x(x+1)(x-1)$ e otteniamo:
$2(x+1)-4x=(x-1)$	distributiva
$2x+2-4x=x-1$	si sommano i termini simili
$-2x+2=x-1$	si aggiungono 2x e 1
$3=3x$	si divide per 3
$x=1$	

E'ora necessario il controllo della soluzione:

poiché la soluzione x = 1 è incompatibile con la condizione di esistenza $x \neq 1$, la soluzione non può essere accettata, quindi l'equazione non ha soluzioni.

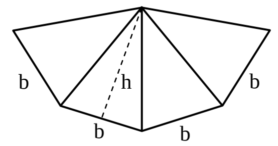
Soluzioni

a) $(2x+3)(6x-1)-9=15x^2-(3x-2)(x-2)$	Distributiva
$12x^2+18x-2x-3-9=15x^2-(3x^2-2x-6x+4)$	Associativa
$12x^2+18x-2x-3-9=15x^2-3x^2+2x+6x-4$	Togliere le parentesi
$12x^2+16x-12=12x^2+8x-4$	Sottrarre $12x^2$
$16x-12=8x-4$	Sottrarre 8x
$8x-12=-4$	Sommare 12
$8x=8$	Dividere per 8
$x=1$	Soluzione: l'equazione è determinata, x = 1
	Condizioni di esistenza: C.E.: $x \neq 0,\ x \neq 1$
b) $\dfrac{1}{x(x-1)}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x-1}$	Moltiplicare per il m.c.m. ossia: x(x – 1)
$1-x+1=x$	Sommare x
$2=2x$	Dividere per 2
$1=x$	x = 1 è una soluzione estranea (vedi C.E.) Quindi si tratta di un'equazione senza soluzione
	Condizioni di esistenza: C.E.: $x \neq \pm 2$
c) $\dfrac{4}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{5x-6}{x^2-4}$	Moltiplicare per x^2-4
$4(x-2)+1(x+2)=5x-6$	Distributiva
$5x=5x$	Sottrarre 5x
$0x=0$	Equazione indeterminata, ma vanno esclusi i valori non accettabili (vedi C.E.). La soluzione è: $\{x \in \mathbf{R} \mid x \neq \pm 2\}$

6.3 Equazioni letterali

Situazione introduttiva

Una piazza è composta da quattro triangoli, di cui non si conoscono le dimensioni, ma unicamente le lettere che rappresentano le basi e l'altezza. Sapendo che è possibile risalire ai valori numerici di superficie e altezza, si desidera determinare la formula che esprime la base b (incognita) in funzione di A_{tot} e h:



Le formule che descrivono fenomeni naturali, sono equazioni letterali nelle quali le lettere diventano incognite a dipendenza dei dati conosciuti e sconosciuti. Per esempio se l'area del trapezio è:
$A = \frac{B+b}{2} \cdot h$ può darsi che, conoscendo l'area A, l'altezza h e la base maggiore B è necessario dover calcolare la base minore b. In questo caso bisogna saper risolvere l'equazione letterale rispetto all'incognita b. Si tratta quindi di risolvere un'equazione letterale.
Le equazioni letterali contenenti un'incognita possono essere risolte con i metodi esposti nel paragrafo precedente. In particolare queste tecniche permettono di isolare qualsiasi variabile contenuta nelle formule che si incontrano nel calcolo professionale.

Esempio 1:

il volume di una sfera è dato dalla seguente equazione: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$. Determinare l'equazione che esprime il raggio della sfera in funzione del volume:

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$ si moltiplica l'equazione per $\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} \cdot V = \pi \cdot R^3$ si divide l'equazione per π

$\frac{3}{\pi \cdot 4} \cdot V = R^3$ si applica la radice cubica ai due membri dell'equazione

$\sqrt[3]{\frac{3}{\pi \cdot 4} \cdot V} = R$

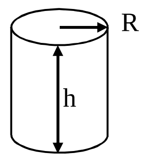
Esempio 2:

la superficie di un cilindro vale: $S = 2 \cdot R^2 \cdot \pi + R \cdot 2 \cdot \pi \cdot h$. Determinare h in funzione delle altre lettere:

$S = 2 \cdot R^2 \cdot \pi + R \cdot 2 \cdot \pi \cdot h$ si sottrae: $2 \cdot R^2 \cdot \pi$

$S - 2 \cdot R^2 \cdot \pi = R \cdot 2 \cdot \pi \cdot h$ si divide per: $R \cdot 2 \cdot \pi$

$\frac{S - 2 \cdot R^2 \cdot \pi}{2 \cdot R \cdot \pi} = h$



Soluzione

In questo caso si tratta di risolvere un'equazione letterale in funzione dell'incognita b:

$$A_{tot} = 2 \cdot (b \cdot h)$$

$$\frac{A_{tot}}{2} = b \cdot h$$

$$b = \frac{A_{tot}}{2} : h$$

$$b = \frac{A_{tot}}{2h}$$

7 Sistemi di equazioni

Situazione introduttiva

Il biglietto di entrata di un cinema costa 15.- Fr per gli adulti, 10.- per i bambini e 12.- per gli anziani. L'incasso della proiezioni pomeridiana è stato di 1780.- Fr. Sapendo che sono stati venduti in totale 135 biglietti e che i bambini erano la metà degli adulti, calcolare il numero di adulti, bambini e anziani che hanno visto il film.

Nel caso in cui è necessario risolvere un problema che presenta più di un'incognita, bisogna individuare un numero di equazioni pari al numero di incognite. In altri termini si tratta di risolvere un **sistema di equazioni**. Esso si presenta con una serie di equazioni raccolte da una parentesi graffa. Risolvere un sistema di equazioni significa determinare i valori di **tutte le incognite** affinché esse soddisfino simultaneamente tutte le equazioni.

Esempio:

$$\begin{cases} 6y + 4x - 2 = 0 \\ \dfrac{3x}{2} = \dfrac{y+7}{2} \end{cases}$$

Dapprima si consiglia di riscrivere il sistema **ridotto a forma normale** (semplificando le equazioni e ordinando termini e valori numerici). Inoltre può essere utile **numerare** tutte le equazioni:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 & 1) \\ 3x - y = 7 & 2) \end{cases}$$

La risoluzione potrà poi essere effettuata con uno dei metodi presentati nella pagina seguente.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 & 1) \\ 3x - y = 7 & 2) \end{cases}$$

Metodo della sostituzione	Metodo dell'addizione o della sottrazione	Metodo del confronto
Il metodo consiste nell'estrarre da un'equazione un'incognita e di **sostituire** poi l'espressione equivalente nell'altra equazione in modo da ottenere un'equazione contenente una sola incognita.	Il metodo consiste nel **sommare o sottrarre**, termine per termine, i membri delle due equazioni in modo da ottenere un'equazione contenente una sola incognita.	Il metodo consiste nell'estrarre dalle due equazioni la stessa incognita e poi **uguagliare** le due espressioni in modo da ottenere un'equazione contenente una sola incognita.
Da una delle due equazioni si isola un'incognita, per esempio: da 1): $2x + 3y = 1$ $2x = 1 - 3y$ $x = \frac{1-3y}{2}$	Dapprima si moltiplicano per tre tutti i membri della seconda equazione (in modo tale che quando si sommeranno le due equazioni la lettera y scompare): $3 \cdot 2)$: $9x - 3y = 21$	Da tutte e due le equazioni isoliamo, per esempio, l'incognita y: da 1): $2x + 3y = 1 \Rightarrow y = \frac{1-2x}{3}$ da 2): $3x - y = 7 \Rightarrow y = 3x - 7$
Si sostituisce nella seconda equazione quanto ottenuto dalla prima equazione e si risolve	Ora si sommano le due equazioni risolvendo rispetto all'incognita rimasta:	A questo punto si uguagliano (confronto) le due espressioni a destra dell'incognita e si risolve:
1) in 2): $3 \cdot (\frac{1-3y}{2}) - y = 7$ $3 \cdot (1-3y) - 2y = 14$ $3 - 9y - 2y = 14$ $-11y = 11$ $y = -1$	1) + 2): $2x + 3y + 9x - 3y = 1 + 21$ $11x = 22$ $x = 2$	1) = 2): $\frac{1-2x}{3} = 3x - 7$ $1 - 2x = 9x - 21$ $-11x = -22$ $x = 2$
Da una delle due equazioni si calcola l'altra incognita:	Da una delle due equazioni si calcola l'altra incognita:	Da una delle due equazioni si calcola l'altra incognita:
da 1): $x = \frac{1 - 3 \cdot (-1)}{2} = 2$	da 2): $3 \cdot 2 - y = 7$ $6 - y = 7$ $y = -1$	da 2): $3 \cdot 2 - y = 7$ $6 - y = 7$ $y = -1$

Soluzione

Il biglietto di entrata di un cinema costa 15.- Fr per gli adulti, 10.- Fr per i bambini e 12.- Fr per gli anziani. L'incasso della proiezioni pomeridiana è stato di 1780.- Fr. Sapendo che sono stati venduti in totale 135 biglietti e che i bambini erano la metà degli adulti, calcolare il numero di adulti, bambini e anziani che hanno visto il film.

Siano: x = numero di adulti, y = numero di bambini, z = numero di anziani.

Possiamo scrivere le seguenti equazioni:

$x + y + z = 135$ (la somma degli spettatori corrisponde al numero di biglietti venduti)
$15x + 10y + 12z = 1780$ (l'incasso totale risulta dalla somma dei versamenti di ciascuna categoria di spettatori)

$y = \frac{x}{2}$ (il numero di bambini corrisponde alla metà del numero di adulti)

Otteniamo quindi il seguente sistema di tre equazioni, ridotto a forma normale:

$$\begin{cases} x + y + z = 135 & 1) \\ 15x + 10y + 12z = 1780 & 2) \\ x - 2y = 0 & 3) \end{cases}$$

Dalla equazione 3) isoliamo la lettera x:
da 3) $x = 2y$

Sostituiamo nelle altre due equazioni l'incognita x con 2y:

3) in 1): $2y + y + z = 135$ che diventa: $3y + z = 135$
3) in 2): $15(2y) + 10y + 12z = 1780$ che diventa: $40y + 12z = 1780$
semplificabile ancora per 4: $10y + 3z = 445$

A questo punto otteniamo un sistema di due equazioni con due incognite:

$$\begin{cases} 3y + z = 135 & 1) \\ 10y + 3z = 445 & 2) \end{cases}$$

Utilizzando nuovamente il metodo della sostituzione, isoliamo z dall'equazione 1):
da 1): $z = 135 - 3y$

Sostituiamo nell'equazione 2) l'incognita z con $135 - 3y$:
1) in 2): $10y + 3(135 - 3y) = 445$ che diventa: $y = 40$

Da 1): $z = 135 - 3 \cdot 40 = 15$
Da 3): $x = 2 \cdot 40 = 80$

La soluzione del problema è la seguente:

le persone che hanno visto il film sono 80 adulti, 40 bambini e 15 anziani.

8 Risoluzione di problemi con le equazioni

Situazione introduttiva

Salgo una montagna a 6 km/h e scendo a 10 km/h. Quanto vale la velocità media ?
(Attenzione! Il risultato non é 8 km/h)

I problemi che si presentano in ambito professionale (o con i quali si è confrontati quotidianamente) vengono solitamente espressi a parole piuttosto che mediante simboli matematici. Sarà quindi importante saper tradurre un problema in espressioni matematiche che permetteranno di giungere ad una soluzione con le regole viste nei paragrafi precedenti. Si tratterà, in altre parole, di **matematizzare** un problema. Mettendo in relazione queste espressioni si giungerà ad un'equazione: ciò presuppone la capacità di saper manipolare o semplificare i due membri dell'equazione con le regole del calcolo algebrico.

Come affrontare i problemi?

Non esistono regole particolari. A volte ci si può aiutare con situazioni già viste precedentemente (non imparate comunque le procedure a memoria!). In altri casi sarà necessario tentare diversi approcci al problema, studiandolo da diversi punti di vista. Magari idee strane possono rivelarsi utili. Sappiate che l'approccio ai problemi è una competenza molto importante e che anche se non si giunge subito allo schema risolutivo, questa attività è un ottimo allenamento. E'comunque quasi sempre utile procedere nel modo indicato qui sotto, considerando che, a dipendenza del problema, alcuni punti, in certi casi potranno essere magari poco importanti, mentre in altri casi saranno determinanti, per giungere alla soluzione. Se verrà applicata la procedura seguente, un piccolo passo nella giusta direzione sarà già stato fatto.

Ecco alcuni consigli per risolvere i problemi:

1)	Si inizia **leggendo attentamente il problema finchè non lo si è compreso a fondo**. Ci si può aiutare, quando ciò è possibile, con una **rappresentazione** della situazione (disegno, schema, …). Si individua **la domanda**.
2)	Si elencano tutte le quantità **conosciute** indispensabili alla risoluzione del problema e si definiscono le **incognite**.
3)	A partire dai dati conosciuti e dalle incognite si scrivono delle relazioni algebriche (**equazioni parziali**).
4)	Si riassumono le relazioni algebriche individuate nel punto 3 in **un'unica equazione** che contenga una sola incognita.
5)	Si **risolve** l'equazione rispetto all'incognita.
6)	Si **analizza il risultato** verificando che sia effettivamente **la soluzione** dell'equazione (equazione determinata) e che corrisponda a quanto richiesto nel problema.

Mostriamo nella pagina seguente due problemi risolti applicando questi 6 punti:

Esempio 1:

Un numero è più piccolo di un altro di 15 unità. Il triplo del primo numero sommato al doppio del secondo dà 80. Determinare i due numeri.

1) Quali sono i due numeri?

2) m = primo numero, n = secondo numero

3) $m = n - 15$ 1)
$3m + 2n = 80$ 2)

4) Sostituiamo m nell'equazione 2) con $n - 15$
1) in 2): $3(n-15) + 2n = 80$

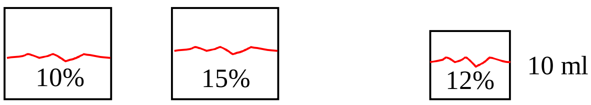
5) 3n – 45 + 2n = 80
5n = 125
n = 25, m = 25 – 15 = 10

6) verifica:
da 1): m = n – 15 = 25 – 15 = 10
da 2): $3m + 2n = 3 \cdot 10 + 2 \cdot 25 = 80$

Esempio 2:

Un chimico dispone di due soluzioni del medesimo acido con una concentrazione rispettivamente del 10% e del 15%. Quanti ml di ciascuna delle due soluzioni devono essere mescolate per ottenere 10 ml di soluzione acida al 12%?

1) Quanti ml di ciascuna delle due soluzioni devono essere mescolate?



2) x = quantità (in ml) della prima soluzione, 10 – x = quantità (in ml) della seconda soluzione

3) 10% (x) = quantità di acido dalla prima soluzione,
15% (10 – x) = quantità di acido dalla seconda soluzione,
12% (10) = quantità di acido dalla soluzione finale

4) 10% (x) + 15% (10 – x) = 12% (10)

5) Risoluzione:
$$\frac{10}{100}(x) + \frac{15}{100}(10 - x) = \frac{12}{100}(10)$$
$$10x + 150 - 15x = 120$$
$$-5x = 120 - 150$$
$$x = \frac{-30}{-5}$$
$$x = 6$$

6) La soluzione è: prima quantità = 6 ml, seconda quantità = 10 ml – 6 ml = 4 ml
Verifica:
$$10\%(6) + 15\%(10 - 6) = 12\%(10)$$
$$0{,}6 + 0{,}6 = 1{,}2$$

Soluzione

La velocità media si calcola nel modo seguente: $v_{media} = \frac{s_{percorso}}{t_{totale}}$.

Lo spazio percorso all'andata è uguale allo spazio percorso al ritorno: se chiamamo *s* la distanza tra il punto di partenza e la cima della montagna, lo spazio percorso vale 2*s*.

Il tempo totale è la somma del tempo di andata (t_1) e il tempo di ritorno (t_2) che sono diversi (infatti le velocità di percorrenza sono diverse).

Il tempo totale vale quindi: $t_{totale} = t_1 + t_2$

Sappiamo però che il tempo di percorrenza, in generale si calcola in questo modo: $t = \frac{s}{v}$

Di conseguenza il tempo totale possiamo esprimerlo così: $t_{totale} = t_1 + t_2 = \frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}$

Esprimiamo ora la velocità media nel modo seguente: $v_{media} = \frac{s_{percorso}}{t_{totale}} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}}$

Semplificando l'espressione otteniamo: $v_{media} = \frac{s_{percorso}}{t_{totale}} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2s}{s \cdot \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right)} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$

(la semplifcazione di *s* mostra che per calcolare la velocità media non è necessario sapere quanto vale la distanza tra la partenza e la cima della montagna. In altre parole, in questo caso, la velocità media è indipendente dallo spazio!)

Finalmente possiamo inserire i valori numerici e calcolare la velocità media:

$$v_{media} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{6\,[km/h]} + \frac{1}{10\,[km/h]}} = 7{,}5\,[km/h]$$

Con questo esempio si voleva dimostrare l'importanza del ragionamento approfondito piuttosto che una risposta affrettata causata, probabilmente, da una situazione apparentemente semplice.