A) Calcolo numerico

In questo capitolo verranno trattati i seguenti argomenti:

- Catalogazione dei numeri (numeri naturali, interi, razionali, irrazionali, reali)
- Rappresentazione dei numeri (retta dei numeri, elementi di insiemistica)
- Operazioni con i numeri (priorità delle operazioni e proprietà dei numeri reali)
- I numeri naturali (addizioni, moltiplicazioni, criteri di divisibilità)
- I numeri interi (sottrazioni, operazioni con i numeri negativi)
- I numeri razionali (divisioni, percentuali, frazioni, proporzioni)
- I numeri irrazionali (radici, potenze)
- I numeri reali (notazione scientifica, approssimazioni, arrotondamento, priorità delle operazioni, errori di approssimazione)
- Equazioni numeriche (legge di monotonia)

1 Introduzione

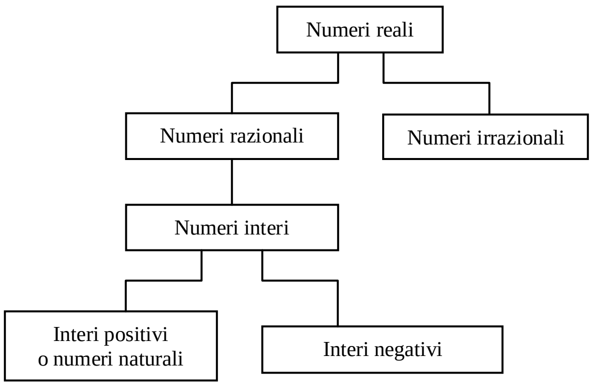
Domanda introduttiva

Che differenza c'è tra un numero razionale e un numero irrazionale?

I numeri usati per misurare quantità esistenti nel mondo reale come lunghezza, area, volume, velocità, carica elettrica, rendimento, intensità di terremoti, profitto, temperatura corporea, prodotto nazionale lordo, ecc. sono chiamati **numeri reali**. E'necessario conoscere le varie categorie di numeri e le loro proprietà.

Dapprima verranno presentate due possibili rappresentazioni dei numeri e, in seguito, per ciascuna categoria, le possibili operazioni e le rispettive proprietà (regole di calcolo).

Iniziamo catalogando i numeri nel modo seguente (le linee che collegano i rettangoli significano che il rettangolo superiore contiene tutti i numeri del rettangolo inferiore):



Ai rispettivi insiemi sono stati associati i seguenti simboli:

Denominazione	**Simbolo**	**Esempi**
numeri naturali (numeri interi positivi)	**N**	$1; 2; 3; \ldots; \infty$
numeri interi (numeri relativi: positivi e negativi)	**Z**	$-\infty; \ldots; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots; \infty$
numeri razionali (frazioni)	**Q**	$-\infty; \ldots; -\frac{1}{2}; \ldots; 0{,}333333; \ldots; 0{,}5; \ldots; 1{,}\overline{6}; \infty$
numeri irrazionali (numeri decimali non periodici)	**I**	$-\infty; \ldots; -\sqrt{3}; \ldots; \sqrt{5}; \ldots; e; \ldots; \pi; \ldots; \infty$
numeri reali (tutti gli insiemi sopraccitati)	**R**	tutti i numeri precedenti

Soluzione

Un numero razionale può sempre essere generato da una frazione.
Esso può essere un numero intero (es.: 2), un numero decimale finito (es.: 0,5) oppure un numero decimale periodico (es.: 0,333…).
Un numero irrazionale **non** può essere generato da una frazione: di conseguenza non può essere un numero intero, nè un numero decimale finito e nemmeno un numero periodico.
Si tratta infatti di un numero decimale non periodico (es.: $\sqrt{2}$, π, …)

2 Rappresentazioni grafiche

I numeri possono essere rappresentati utilizzando i seguenti metodi:
- la retta dei numeri;
- gli insiemi.

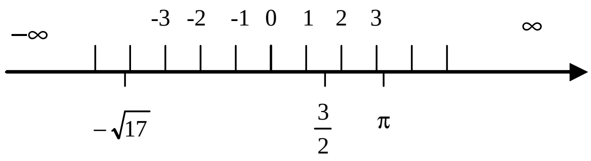
2.1 La retta numerica

Domanda introduttiva

Com'è possibile rappresentare in modo ordinato tutti i numeri reali?

I numeri presentano un ordine che ci permette di disporli su una retta. Questa rappresentazione è spesso utilizzata anche nella realtà (basti pensare ai termometri, alle righe, ai metri pieghevoli utilizzati dagli artigiani, ecc.)

La retta utilizzata per rappresentare i numeri si chiama **la retta dei numeri** (**o numerica**). Essa è rappresentata da una freccia che va dall'infinito negativo (simboleggiato con $-\infty$) all'infinito (simboleggiato con: ∞).
Il senso di riferimento è indicato dalla freccia.



Sulla base di questa rappresentazione possiamo utilizzare i termini presentati nella tabella della pagina seguente:

Terminologia	**Spiegazioni**	**Esempi**
maggiore	Significa che, sulla retta numerica, un numero si trova a **destra** di un altro numero	$3 > 2$
maggiore o uguale	Come sopra ma anche che i due numeri possono essere uguali	$8 \geq 6$ oppure $8 \geq 8$
minore	Significa che, sulla retta numerica, un numero si trova a **sinistra** di un altro numero	$-3 < 2$
minore o uguale	Come sopra ma anche che i due numeri possono essere uguali	$5 \leq 6$ oppure $6 \leq 6$
diverso	Si tratta di una **disuguaglianza**	$\pi \neq 2$
precedente	Numero situato subito a sinistra (vale solo per i numeri **discreti**, ossia numeri che tra di loro presentano spazi vuoti, come i numeri naturali o interi)	4 è il precedente di 5
successivo	Numero situato subito a destra (vale solo per i numeri **discreti**, ossia numeri che tra di loro presentano spazi vuoti, come i numeri naturali o interi)	-8 è il successivo di -9
consecutivi	Numeri che si susseguono (vale solo per i numeri **discreti**, ossia numeri che tra di loro presentano spazi vuoti, come i numeri naturali o interi)	2 e 3 oppure $-2, -1, 0$
distanza unitaria	È la distanza tra due numeri **interi** consecutivi	distanza tra 4 e 5
intervallo aperto	Insieme di tutti i numeri reali compresi tra due numeri n_1 e n_2 (n_1 e n_2 **non** compresi nell'intervallo)	$]-3; 2[$
intervallo chiuso	Insieme di tutti i numeri reali compresi tra due numeri n_1 e n_2 (n_1 e n_2 compresi nell'intervallo)	$[-3; 2]$
coordinata	Sulla retta numerica indica distanza e verso rispetto allo 0	-3 (3 unità a sinistra) $+2$ (2 unità a destra)
valore assoluto (modulo)	Sulla retta numerica è la distanza dallo 0 indipendentemente dal verso	$\lvert -3 \rvert = \lvert +3 \rvert = 3$

Soluzione

Uno strumento matematico che ci permette la rappresentazione dei numeri considerando le loro caratteristiche (ordine, direzione) è la retta numerica. Ad ogni numero viene associato un punto della retta e, reciprocamente, ogni punto della retta corrisponde a un determinato numero.

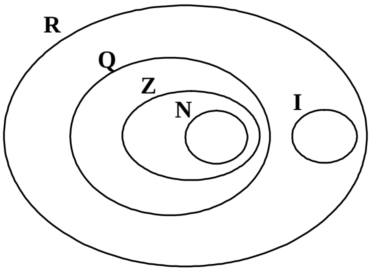
2.2 Gli insiemi

Situazione introduttiva

In una classe ci sono 20 allievi. Tra questi 9 conoscono solo l'italiano, 2 solo il tedesco, 1 solo il francese, 3 parlano italiano e tedesco, 2 tedesco e francese, 1 italiano e francese, 1 italiano, francese e tedesco. Un allievo parla solo spagnolo.
Perché la somma degli allievi che conoscono l'italiano o il francese o il tedesco è maggiore di 20?
Com'è possibile visualizzare la situazione con una rappresentazione grafica?

Quando è necessario raggruppare diversi elementi numerabili in determinate categorie, si possono utilizzare gli insiemi. Questa rappresentazione, proposta dal matematico svizzero Leonhard Euler (1707-1783) e ripresa da John Venn (1834-1923), è di notevole aiuto per visualizzare le relazioni tra elementi che presentano caratteristiche comuni. Gli insiemi sono quindi uno strumento pratico non solo per rappresentare le categorie di numeri (come vedremo qui di seguito) ma anche per applicazioni nell'ambito delle funzioni o del calcolo combinatorio (per citare solo due esempi).

Ecco la rappresentazione dei numeri utilizzando **gli insiemi**:



numeri naturali: $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots, \infty\}$
numeri interi: $\mathbf{Z} = \{-\infty, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, \infty\}$
numeri razionali: $\mathbf{Q} = \{-\infty, \ldots, -\frac{2}{3}, \ldots, \frac{3}{4}, \ldots, \infty\}$
numeri irrazionali: $\mathbf{I} = \{-\infty, \ldots, -\sqrt{3}, \ldots, \pi, \ldots, \infty\}$
numeri reali: $\mathbf{R} = \{N, Z, Q, I\}$

Ricordiamo in questa occasione alcuni elementi di insiemistica.

Innanzitutto un insieme è un **raggruppamento di oggetti** se esiste un criterio oggettivo per stabilire univocamente se un soggetto fa parte del raggruppamento o no.

Infatti possono essere insiemi i seguenti raggruppamenti:
- i pianeti del sistema solare,
- i 10 libri più letti dagli allievi della nostra classe,
- tutti i numeri naturali maggiori a 100.

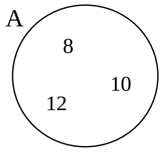
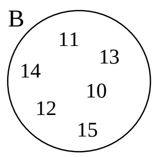
Non sono insiemi i seguenti raggruppamenti:
- i numeri molto grandi,
- i libri più letti,
- le case più belle.

Se un oggetto fa parte di un insieme, si dice che esso è un **elemento** che **appartiene** all'insieme e il simbolo di appartenenza è: $\in$. Per esempio $3 \in \mathbf{N}$. Se invece un elemento **non appartiene** all'insieme il simbolo utilizzato è: $\notin$. Per esempio $0{,}5 \notin \mathbf{N}$.

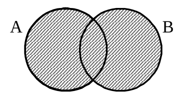
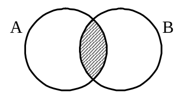
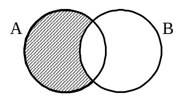
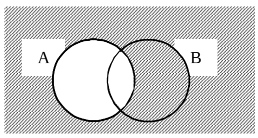
Esempio:
se vogliamo descrivere due insiemi (A e B) che contengono:

- A i numeri: 8, 10, 12
- B i numeri: 10, 11, 12, 13, 14, 15

potremo utilizzare i diagrammi di Euler-Venn o le seguenti forme di scrittura:

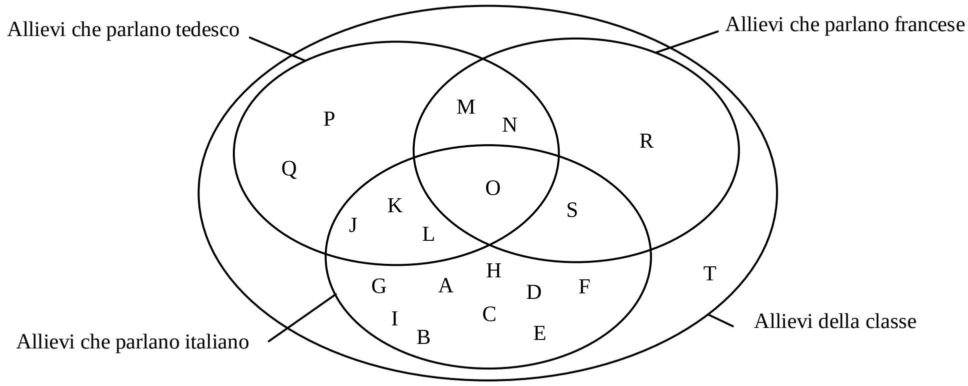
Diagrammi di Euler-Venn	**Forme di scrittura**
	Forma di scrittura **esplicita** o **per elencazione** (gli elementi vengono elencati individualmente): $A = \{8, 10, 12\}$ Le parentesi graffe indicano che A è un insieme.
	Forma di scrittura **implicita** o **per caratteristica** (si utilizza una formulazione descrittiva): $B = \{b \in N \mid 10 \le b \le 15\}$ Significa: "*b è una variabile che può assumere valori contenuti nell'insieme dei numeri naturali, in particolare b è compresa nell'intervallo tra 10 e 15 (10 e 15 compresi)*".

Facendo riferimento a questi due esempi, possiamo ora definire le operazioni di base con gli insiemi:

Operazioni con gli insiemi			
espressione algebrica	**significato**	**dall'esempio**	**diagrammi di Euler-Venn**
$A \cup B$	**unione** di A con B	= {8, 10, 11, 12, 13, 14, 15}	
$A \cap B$	**intersezione** di A con B	= {10, 12}	
$A - B$	**differenza** tra A e B	= {8}	
$\overline{A}$	**negazione** di A	tutti i numeri tranne quelli contenuti in A	

Soluzione

Una possibile rappresentazione della situazione descritta è la seguente:



Il numero 27 risulta dalla somma degli allievi che parlano italiano (ossia i 14 allievi inseriti nell'insieme "Allievi che parlano italiano") più gli allievi che parlano francese (ossia i 5 allievi inseriti nell'insieme "Allievi che parlano francese") più gli allievi che parlano tedesco (ossia gli 8 allievi inseriti nell'insieme "Allievi che parlano tedesco").

3 Operazioni con i numeri

Situazioni introduttive

Risolvere le seguenti operazioni numeriche senza utilizzare la calcolatrice:

1) $6-2\cdot 3+8:2=$
2) $(3\cdot 5+6)\cdot 0\cdot 6795=$
3) $126\cdot 5=$
4) $12345\cdot\dfrac{1}{12345}=$
5) Usando esclusivamente 4 volte la cifra 4 e le 4 operazioni fondamentali si possono ottenere tutte le 10 cifre del sistema decimale (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).
   Per esempio: 0 = 4 + 4 – 4 – 4. Calcolare le altre 9 cifre rispettando le condizioni poste.

In generale tutte le operazioni devono essere eseguite considerando le seguenti priorità:

- **priorità 1**: le espressioni racchiuse tra parentesi hanno priorità di calcolo.
- **priorità 2**: elevazione a potenza o radice;
- **priorità 3**: moltiplicazione e divisione;
- **priorità 4**: addizione e sottrazione.

Esempi:

a) $10+3\cdot 2=10+6=16$

b) $3^4+2\cdot 5^2-\sqrt{9}+20:2^2=81+2\cdot 25-3+20:4=81+50-3+5=133$

c) $3^4+2\cdot\left(5^2-\sqrt{9}\right)+(20:2)^2=3^4+2\cdot(25-3)+10^2=3^4+2\cdot 22+10^2=81+44+100=225$

Gli esempi sopraccitati sono **espressioni numeriche**, ossia sequenze di operazioni con i numeri. Ricordiamo che **semplificare** espressioni numeriche significa sostituire l'espressione iniziale con una più semplice che abbia lo stesso valore, proprio come dimostrato dagli esempi.

Nella pagina seguente sono presentate le proprietà delle operazioni con i numeri.

Proprietà	**Regole**	**Esempi**
commutativa	a + b = b + a oppure a · b = b · a Attenzione: a – b ≠ b – a oppure a : b ≠ b : a	5 + 3 = 3 + 5 oppure 6 · 4 = 4 · 6 Attenzione: 5 – 3 ≠ 3 – 5 oppure 3 : 5 ≠ 5 : 3
associativa	a + (b + c) = (a + b) + c oppure a · (b · c) = (a · b) · c Attenzione: a – (b + c) ≠ (a – b) + c oppure a : (b + c) ≠ (a : b) + c	2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4 oppure $2\cdot(3\cdot4)=(2\cdot3)\cdot4$ Attenzione: 6 – (3 + 2) ≠ (6 – 3) + 2 oppure 12 : (4 + 2) ≠ (12 : 4) + 2
distributiva	a · (b + c) = (a · b) + (a · c) oppure (a + b) : c = (a : c) + (b : c) Attenzione: a : (b + c) ≠ a : b + a : c	6 · (2 + 5) = 6 · 2 + 6 · 5 oppure (20 + 4) : 2 = 20 : 2 + 4 : 2 Attenzione: 12 : (4 + 2) ≠ 12 : 4 + 12 : 2
invariantiva	a – b = (a + c) – (b + c) oppure a : b = (a · c) : (b · c) Attenzione: a + b ≠ (a + c) + (b + c) Oppure a · b ≠ (a · c) · (b · c)	7 – 5 = (7 + 2) – (5 + 2) oppure 2 : 3 = (2 · 4) : (3 · 4) Attenzione: 2 + 3 ≠ (2 + 4) + (3 + 4) oppure 2 · 3 ≠ (2 · 4) · (3 · 4)
elemento neutro	a + 0 = a oppure a ·1 = a	5 + 0 = 5 oppure 5 · 1 = 5
opposto	Se a + (– a) = 0 allora – a è l’opposto di a	–5 è l’opposto di 5
inverso (o reciproco)	Se a · 1/a = 1 allora 1/a è l’inverso di a (a diverso da 0)	4 è l’inverso di ¼
annullamento del prodotto	a · b · c · 0 = 0	3 · 345 · 3456789 · 0 = 0

Soluzioni

1) $6-2\cdot3+8:2=6-6+4=4$
2) $(3\cdot5+6)\cdot0\cdot6795=0$
3) $126\cdot5=(100+20+6)\cdot5=500+100+30=630$
4) $12345\cdot\dfrac{1}{12345}=1$
5) $1=\dfrac{44}{44};\quad 2=\dfrac{4}{4}+\dfrac{4}{4};\quad 3=\dfrac{4+4+4}{4};\quad 4=[(4-4)\cdot4]+4\quad 5=\dfrac{4\cdot4+4}{4};\quad 6=(4+4):4+4;$
$7=44:4-4;\quad 8=4+4+4-4;\quad 9=4:4+4+4$

4 Numeri naturali

Situazione introduttiva

Con 432 cioccolatini, 600 caramelle e 180 biscotti si desidera confezionare dei pacchetti aventi tutti lo stesso numero di dolciumi. Qual è il numero massimo di pacchetti uguali che si possono preparare utilizzando tutti i dolciumi?

Nell'insieme dei numeri naturali è sempre possibile effettuare le seguenti operazioni:

Operazione	**Esempio**	**Definizioni**
addizione	$5 + 3 = 8$	5 e 3 sono gli **addendi**; 8 è la **somma**
moltiplicazione	$6 \cdot 3 = 18$	6 e 3 sono i **fattori**; 18 è il **prodotto**
elevazione a potenza (con esponente naturale)	$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$	2 è la **base**; 3 è l'**esponente** in generale $a^0 = 1$ (con: $a \neq 0$, $a \in \mathbf{R}$)

E'importante conoscere i seguenti termini:

Terminologia	**Significato**	**Esempi**
numero primo	Un numero che ha esattamente 2 divisori	5, 11, 23
scomposizione in fattori primi (fattorizzazione)	Se un numero non è primo, allora si può scomporre in fattori primi	$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ (2, 3, 5, 7 sono i fattori primi di 210)
divisore	Se $k = m \cdot n$ (con k, m, n $\in$ **N**) allora: m e n si dicono **divisori** di k	i divisori di 15 sono: 15, 5, 3, 1. Si scrive: $D_{15} = \{15, 5, 3, 1\}$
multiplo	Se $k = m \cdot n$ (con k, m, n $\in$ **N**) allora: k si dice **multiplo** di m e n	i multipli di 3 sono 3, 6, 9, 12, 15, …. Si scrive: $M_3 = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$
minimo comune multiplo (**m.c.m.**)	Corrisponde al più piccolo numero divisibile per tutti i numeri considerati (corrisponde al minimo comun denominatore nel caso di una somma di frazioni)	il m.c.m di 3, 4 e 6 è 12. Si scrive: m.c.m. (3; 4, 6) = 12 $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1\cdot 4+1\cdot 3+1\cdot 2}{12}=\frac{9}{12}$
Massimo Comun Divisore (**M.C.D.**)	E' il divisore più grande di tutti i numeri considerati (corrisponde al numero che permette la semplificazione ai minimi termini delle frazioni numeriche)	il M.C.D di 9 e 12 è 3. Si scrive : M.C.D (9; 12) = 3 Quindi: $\frac{9}{12}=\frac{9:3}{12:3}=\frac{3}{4}$

Ricordiamo alcuni **criteri di divisibilità** che potrebbero essere utili per la scomposizione in fattori primi:

Un numero è divisibile per	**quando**	**Esempio di numero divisibile**	**Esempio di numero non divisibile**
2	l'ultima cifra è pari	5679254	5679253
3	la somma delle cifre è divisibile per 3	15465	15466
4	le ultime due cifre sono divisibili per 4	97540	97543
5	l'ultima cifra è 0 o 5	234987560	234987561
6	la somma delle cifre è divisibile per 3 e l'ultima cifra è pari	48198	38199
7	il numero ottenuto sommando al numero delle sue decine il quintuplo delle unità è divisibile per 7 (applicare successivamente)	1519: 151 +5 · 9 = 196 poi 19 + 5 · 6 = 49	1518: 151 +5 · 8 = 191 poi 19 + 1 · 5 = 24
9	la somma delle cifre è divisibile per 9	97254	97255
11	la differenza tra la somma delle cifre in posizione pari e la somma delle cifre in posizione dispari (o viceversa) è uguale a 11 o a un multiplo di 11	6150914 6 + 5 + 9 +4 = 24 1 + 0 + 1 = 2 24 – 2 = 22	6150915 6 + 5 + 9 +5 = 25 1 + 0 + 1 = 2 25 – 2 = 23
25	le ultime due cifre sono divisibili per 25	548650	548651

In generale: se un numero m è divisibile per a e per b, allora m è divisibile per (a · b).

Per esempio: 126 è divisibile per 2 e per 9, quindi 126 è anche divisibile per (2 · 9), ossia per 18.

Soluzione

Si tratta di determinare il M.C.D. dei numeri 432, 600 e 180, corrispondente al numero massimo di pacchetti, senza resti.

$432 = 2^4 \cdot 3^3; \quad 600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2; \quad 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \quad \Rightarrow \text{M.C.D} = 2^2 \cdot 3 = 12$

In ciascuno dei 12 sacchetti avremo quindi:
432 cioccolatini : 12 = 36 cioccolatini;
600 caramelle : 12 = 50 caramelle;
180 biscotti : 12 = 15 biscotti.

5 Numeri interi

Situazioni introduttive

1) Un contabile deve calcolare il risultato di fine semestre della ditta in cui svolge la sua attività, considerando l'andamento rappresentato dalla seguente tabella (valori in migliaia di Fr):

mesi	gen	feb	mar	apr	mag	giu
guadagni	500	200		600		
perdite			300		800	300

Calcolare il risultato finanziario a fine semestre.

2) Risolvere le seguenti operazioni:
a) $2-(6-3)=\ ?$ b) $2^{-2}=\ ?$ c) $(-2)\cdot(-4)=\ ?$

3) In ambito geografico, cosa significa: 2000 m.s.m. oppure – 1000 m.s.m ?

I numeri interi comprendono i numeri naturali (interi positivi) e i numeri negativi. Essi vengono utilizzati in diversi ambiti: temperature negative, situazione finanziaria (saldo passivo o attivo), posizione di un ascensore in un palazzo con piani interrati, ecc. Infatti il segno positivo o negativo davanti alla cifra permette di indicare una caratteristica supplementare necessaria per alcune grandezze fisiche che altrimenti non potrebbero essere definite in modo univoco con i numeri positivi (per esempio: l'accelerazione).

Nell'ambito dei numeri interi, in aggiunta alle operazioni viste nel paragrafo precedente, è sempre possibile effettuare le seguenti operazioni:

Operazione	**Esempio**	**Definizioni**
sottrazione	$6-8=-2$	6 è il **minuendo**; 8 è il **sottraendo**; –2 è la **differenza**
elevazione a potenza (con esponente intero negativo)	$2^{-3}=\frac{1}{2^3}$	in generale: $a^{-1}=\frac{1}{a}$ (con: $a\neq 0$)

Attenzione:

- $-2^2=-4$ Infatti: $-2^2=(-1)\cdot 2^2=(-1)\cdot 4=-4$
- $(-2)^2=4$ Infatti: $(-2)^2=[(-1)\cdot 2]^2=(-1)^2\cdot 2^2=(1)\cdot 4=4$
- $-2^3=-8$ Infatti: $-2^3=(-1)\cdot 2^3=(-1)\cdot 8=-8$
- $(-2)^3=-8$ Infatti: $(-2)^3=[(-1)\cdot 2]^3=(-1)^3\cdot 2^3=(-1)\cdot 8=-8$

In realtà, nell'ambito dei numeri interi si parla solo di **somma algebrica** poiché la sottrazione a – b viene considerata la somma a + (– b). Per esempio: $5-2=5+(-2)=3$.

Inoltre, normalmente, i numeri positivi vengono scritti senza segno: + 5 = 5.
I numeri negativi semplificano la seguente scrittura: (–1) · 5 = –5.
Legge della negazione: $10-(3+4-5)=10-3-4+5=8$.

Ricordiamo qui di seguito le regole delle operazioni con i numeri interi:

Addizione:

$(+a) + (+b) = a + b$	$(+4) + (+3) = 4 + 3 = 7$
$(+a) - (+b) = a - b$	$(+4) - (+3) = 4 - 3 = 1$
$(+a) + (-b) = a - b$	$(+4) + (-3) = 4 - 3 = 1$
$(+a) - (-b) = a + b$	$(+4) - (-3) = 4 + 3 = 7$

Moltiplicazione:

$(+a) \cdot (+b) = a \cdot b$	$(+4) \cdot (+3) = 12$
$(+a) \cdot (-b) = -a \cdot b$	$(+4) \cdot (-3) = -12$
$(-a) \cdot (+b) = -a \cdot b$	$(-4) \cdot (+3) = -12$
$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$	$(-4) \cdot (-3) = 12$

Divisione:

$\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}$	$\frac{+3}{+4} = +\frac{3}{4}$
$\frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$	$\frac{+3}{-4} = -\frac{3}{4}$
$\frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$	$\frac{-3}{+4} = -\frac{3}{4}$
$\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}$	$\frac{-3}{-4} = +\frac{3}{4}$

Elevazione a potenza (a, b sono numeri naturali):

$(-a)^b = a^b$ se b è pari,	$(-4)^2 = [(-1) \cdot 4]^2 = (-1)^2 \cdot 4^2 = 16$
$(-a)^b = -(a^b)$ se b è dispari	$(-4)^3 = [(-1) \cdot 4]^3 = (-1)^3 \cdot 4^3 = -64$
$-a^b = (-1) \cdot a^b$	$-4^2 = (-1) \cdot 4^2 = (-1) \cdot 16 = -16$

Per curiosità vengono proposte qui di seguito alcune dimostrazioni:

Come **verificare** che: (+3) · (–5) = –15 ?	Come **verificare** che: (–8) · (–2) = 16 ?
Poiché (+3) · (0) = 0, allora: (+3) · [(–5) + (+5)] = 0, ossia:[(+3) · (–5)] + [(+3) · (+5)] = 0, che diventa: (+3) · (–5) + 15 = 0. Quindi: (+3) · (–5) deve essere uguale a –15.	Sapendo che: –8 = (–8) · (+1), e che: (+1) = (–2) + (+3), abbiamo: –8 = (–8) · (+1) = (–8) · [(–2)+(+3)]. Se distribuiamo: –8 = [(–8) · (–2)] + [(–8) · (+3)] che diventa: –8 = (–8) · (–2) + (–24). Sommando 24 ai due membri dell'uguaglianza si ottiene: –8 + 24 = (–8) · (–2) ossia: (–8) · (–2) = 16.

Come **verificare** che: $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$?
Consideriamo: $2^2 : 2^5 = \frac{2^2}{2^5} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^3}$ Inoltre sappiamo che: $2^2 : 2^5 = 2^{2-5} = 2^{-3}$ Quindi: $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

Soluzioni

1) Il risultato finanziario corrisponde alla somma algebrica di guadagni e perdite:
Risultato finanziario = 500 + 200 + (–300) + 600 + (–800) + (–300) = –100.
Il segno "– " indica che a fine semestre il risultato finanziario presenta una perdita di 100'000.- Fr.

2) Soluzioni:
a) $2-(6-3)=2-6+3=-1$
b) $2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$
c) $(-2)\cdot(-4)=8$

3) 2000 m.s.m. significa 2000 metri sopra il livello del mare (+ 2000 m), mentre – 1000 m.s.m. significa 1000 metri sotto il livello del mare (– 1000 m).

6 Numeri razionali

Situazioni introduttive

1) $\frac{4}{8} = ?$ 2) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = ?$ 3) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = ?$ 4) $\frac{\frac{1}{2}}{4} : \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{\frac{1}{3}} = ?$ 5) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = ?$

6) Quando, dall'estero si rientra in Svizzera, si possono importare due litri di vino. Se mi presento alla dogana con tre bottiglie di $\frac{3}{8}$ di litro (mezze bottiglie) e una bottiglia di $\frac{3}{4}$, devo annunciare la merce, per pagare eventuali tasse, oppure non c'è nulla da dichiarare?

7) I $\frac{3}{5}$ degli allievi di una classe sono ticinesi. A quale percentuale corrisponde?

8) Se ottengo uno sconto del 15% su un determinato prodotto, quale frazione pagherò rispetto al prezzo di listino?

9) In una nazione, annualmente, vengono riscontrati, sulle strade, 200 morti su un totale di 4 milioni di utenti mentre sulle montagne vengono censiti 12 morti su un totale di 960000 escursionisti. E' più pericoloso andare in montagna o immettersi nel traffico stradale?

Nell'ambito dei numeri razionali, in aggiunta alle operazioni viste nel paragrafo precedente, è sempre possibile effettuare la seguente operazione:

Operazione	**Esempio**	**Definizioni**
divisione (rapporto)	2 : 10 = 0,2	2 è il **dividendo**; 10 è il **divisore**; 0,2 è il **quoziente**

Il quoziente può essere espresso sottoforma di **numero razionale**, ossia una **frazione**: $0{,}2 = 2:10 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

<table>
<tr><th colspan="3">Un numero razionale può dare un …</th></tr>
<tr><td rowspan="2">… risultato intero.
Es.: $\frac{6}{3} = 2$</td><td colspan="2">… risultato decimale …</td></tr>
<tr><td>… finito.
Es.: $\frac{5}{2} = 2{,}5$</td><td>… periodico.
Es.:
$\frac{1}{3} = 0{,}333... = 0{,}\overline{3}$</td></tr>
</table>

Viceversa ogni **numero intero o decimale (periodico o finito)** corrisponde a un **numero razionale**:

$$5 = \frac{10}{2}; \quad 0{,}7 = \frac{7}{10}; \quad 1{,}075 = \frac{1075}{1000} = \frac{43}{40}.$$

Per determinare una frazione che esprime un numero decimale periodico si procede nel modo seguente:

Esempio a) : $0,\overline{173} = ?$

$$x = 0,\overline{173}$$
$$1000 \cdot x = 173,\overline{173}$$
$$1000x - x = 173,\overline{173} - 0,\overline{173}$$
$$999 \cdot x = 173$$
$$x = \frac{173}{999}$$

Esempio b) : $1,2\overline{345} = ?$

$$x = 1,2\overline{345}$$
$$10 \cdot x = 12,\overline{345}$$
$$10'000 \cdot x = 12345,\overline{345}$$
$$10'000x - 10x = 12345,\overline{345} - 12,\overline{345}$$
$$9990x = 12'333$$
$$x = \frac{12333}{9990} = \frac{4111}{3330}$$

Esempio c) : $0,\overline{9} = ?$

$$x = 0,\overline{9}$$
$$10 \cdot x = 9,\overline{9}$$
$$10x - x = 9,\overline{9} - 0,\overline{9}$$
$$9x = 9$$
$$x = 1$$

Impiego corrente dei numeri razionali:

Denominazione	**Esempio**	**Significato**
Forma percentuale	$\frac{2}{5} = 0,4 = \frac{40}{100} = 40\%$ Inversamente abbiamo: $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} = 0,75$	Si tratta di **una frazione con il denominatore uguale a 100**, scritta in un'altra forma. Le percentuali sono utilizzate per esprimere parti di una determinata quantità (es: sconto del 10% di 50.- Fr). Inoltre le percentuali permettono un confronto diretto non sempre esplicito con le frazioni: se, per esempio, in una classe ci sono $\frac{3}{4}$ di allieve bionde e in un'altra classe ce ne sono $\frac{2}{5}$, il confronto immediato non è possibile. Se invece $\frac{3}{4}$ viene riscritto in percentuale, ossia $\frac{3}{4} = 0,75 = 75\%$ e $\frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$ allora è facile affermare dove si trova il maggior numero di allieve bionde.
Proporzione	10 : 2 = 30 : 6 Oppure: $\frac{10}{2} = \frac{30}{6}$	Una proporzione è **un'uguaglianza tra due frazioni equivalenti**. Esempio: se un pittore pittura 10 m^2 in due ore, per pitturare 30 m^2 impiegherà 6 ore. La proporzione può essere scritta così: 10 : 2 = 30 : 6 oppure $\frac{10}{2} = \frac{30}{6}$ (= 5 m^2 in un'ora) Il rapporto è lo stesso e indica la superficie pitturata in un'ora. In questo caso si parla di grandezze **direttamente proporzionali** (se, per esempio, il tempo di lavoro raddoppia, anche la superficie pitturata raddoppia). Se invece ad un aumento di una grandezza corrisponde una diminuzione di una seconda grandezza, allora si dice che esse sono **inversamente proporzionali** (per esempio se considero il tempo che si impiega per percorrere una galleria e la velocità di spostamento; in questo caso se la velocità raddoppia il tempo per percorrere la galleria dimezza).

Calcolo con le frazioni:

Proprietà e operazioni	**Regole**	**Esempi**
semplificazione (riduzione ai minimi termini)	$\frac{a\cdot m}{b\cdot m}=\frac{a}{b}$	$\frac{4}{6}=\frac{2\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{2}{3}$ (frazioni equivalenti)
amplificazione	$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m}$	$\frac{2}{3}=\frac{12}{18}$ (frazioni equivalenti)
somma	$\frac{a}{n}+\frac{c}{n}=\frac{a+c}{n}$ $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{2+4}{3}=\frac{6}{3}=2$ $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 5+4\cdot 3}{3\cdot 5}$ **e non**: $\cancel{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{2+4}{3+5}}$
moltiplicazione	$\frac{a}{b}\cdot c=\frac{ac}{b}$ $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$	$\frac{2}{3}\cdot 5=\frac{2\cdot 5}{3}=\frac{10}{3}$ $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}$
divisione	$\frac{a}{b}:c=\frac{a}{bc}$ $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$	$\frac{2}{3}:3=\frac{2}{3\cdot 3}=\frac{2}{9}$ **e non**: $\cancel{\frac{2}{3}:3=2}$ $\frac{2}{3}:\frac{4}{5}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}$
frazione negativa	$\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$	$-\frac{1}{2}=\frac{-1}{2}=\frac{1}{-2}$
elevazione a potenza	$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2^2}{3^2}=\frac{4}{9}$
potenza negativa	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{b^n}{a^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3^2}{2^2}=\frac{9}{4}$ oppure: $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}=\frac{4}{3}$

Attenzione alle scritture:	
$\frac{1}{\frac{2}{3}}=1:\frac{2}{3}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}}{3}=\frac{1}{2}:3=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

Lo zero e la divisione	
6 : 0 è **impossibile**	non esiste **nessun** numero che moltiplicato per 0 dia 6
0 : 0 è **indeterminato**	poiché **qualsiasi** numero moltiplicato per 0 dà 0
0 : 6 è **uguale** a 0	poiché 0 è l'**unico** numero che moltiplicato per 6 dà 0

Soluzioni

1) $\frac{4}{8}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 3+1\cdot 2}{6}=\frac{5}{6}$

3) $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{1}=\frac{3}{2}$

4) $\frac{\frac{1}{2}}{4}:\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{2}:4\right)\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(2:\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{3}{4}\cdot(2\cdot 3)=\frac{1\cdot 3\cdot 6}{2\cdot 4\cdot 4}=\frac{18}{32}=\frac{9}{16}$

5) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2}=\frac{3^2}{2^2}=\frac{9}{4}$

6) $3\cdot\frac{3}{8}+\frac{3}{4}=\frac{9}{8}+\frac{3}{4}=\frac{9+3\cdot 2}{8}=\frac{15}{8}\leq 2$ litri : quindi non è necessario dichiarare la merce.

7) $\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 20}{5\cdot 20}=\frac{60}{100}=60\%$

8) $100\%-15\%=85\%=\frac{85}{100}=\frac{17}{20}$ del prezzo di listino.

9) $\frac{200}{4000000}=\frac{1}{20000}=0{,}005\%$: percentuale di decessi sulle strade.

$\frac{12}{960000}=\frac{1}{80000}=0{,}00125\%$: percentuale di decessi in montagna.

Di conseguenza, sulla base di questi dati, risultano esserci, in proporzione, più decessi sulle strade.

7 Numeri irrazionali

Situazioni introduttive

1) Quali caratteristiche differenziano i numeri irrazionali dai numeri razionali?
2) Risolvere le seguenti operazioni con i numeri irrazionali:

a) $\sqrt{4} = ?$ b) $\sqrt[3]{2^6} = ?$ c) $3^{-\frac{1}{2}} = ?$ d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} = ?$ e) $\frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[3]{2}} = ?$ f) $\sqrt{3^2 + 4^2} = ?$

La caratteristica principale dei numeri irrazionali è che hanno **infinite cifre dopo la virgola, non periodiche** (ossia non ci sono cifre o gruppi di cifre che si ripetono). Essi non si possono riscrivere sotto forma di frazione (per es.: $\sqrt{2}$). In particolare studieremo i numeri irrazionali che sono il risultato di **radicali** (per esempio: lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1).

Ricordiamo che i numeri irrazionali che non sono il risultato di una radice si chiamano **trascendenti**, per esempio: π.

<table>
<tr><th colspan="4">L'estrazione di una radice può dare un …</th></tr>
<tr><td rowspan="2">… risultato intero.

Es.: $\sqrt{4} = 2$</td><td colspan="3">… risultato decimale …</td></tr>
<tr><td>… finito.

Es.: $\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$</td><td>… periodico.

Es.: $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$</td><td>… infinito e non periodico
ossia un
numero irrazionale.
Es.: $\sqrt{2} = 1{,}414...$</td></tr>
</table>

Nell'ambito dei numeri irrazionali in aggiunta alle operazioni viste nel paragrafo precedente, è sempre possibile effettuare le seguenti operazioni:

<table>
<tr><th>Operazione</th><th>Esempio</th><th>Definizioni</th></tr>
<tr><td>estrazione di radice:</td><td>$\sqrt[3]{2^6} = 4$</td><td>2 è il radicando; 3 è l'indice della radice;
6 è l'esponente del radicando; 4 è la radice;
(la radice senza indice significa radice quadrata)</td></tr>
<tr><td>elevazione a potenza:
(con esponente razionale)</td><td>$2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$</td><td>in generale: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ (con: $a > 0$, $a \in \mathbf{R}$)
<u>Dimostrazione:</u>
data l'equazione: $\sqrt[n]{a} = a^x$, determiniamo x:
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot ... = a^x \cdot a^x \cdot a^x \cdot ...$
$a^1 = a^{x \cdot n}$
$1 = x \cdot n \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{n}$</td></tr>
</table>

In questo capitolo vengono proposte le regole sulle potenze poiché **ogni espressione radicale può essere espressa con potenze a esponente razionale e viceversa**. Infatti, se $a > 0$:

$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$	Per esempio: $\sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$

Di conseguenza le espressioni radicali si possono trasformare in espressioni con potenze a esponente razionale e risolte con le regole seguenti:

Regole	**Dimostrazioni**	**Esempi**
1) $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt{a} = a^m \Rightarrow a = a^{2m} \Rightarrow 1 = 2m \Rightarrow m = \frac{1}{2}$	$\sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$
2) $\sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt[4]{a^2} = a^{\frac{2}{4}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$	$\sqrt[4]{3^8} = 3^{\frac{8}{4}} = 3^2 = 9$
3) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^3 \cdot a^2 = (a\cdot a\cdot a)\cdot(a\cdot a) = a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a = a^5$	$\sqrt[3]{5}.\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{3}}.5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = 5^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{5^5}$
4) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{a^3}{a^2} = \frac{a\cdot a\cdot a}{a\cdot a} = a$, ossia: $\frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a$	$\frac{3^4}{3^2} = 3^{4-2} = 3^2$
5) $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$	$\left(a^3\right)^2 = (a\cdot a\cdot a)^2 = (a\cdot a\cdot a)\cdot(a\cdot a\cdot a) = a^6$	$(2^4)^6 = 2^{4\cdot 6} = 2^{24}$
6) $(ab)^m = a^m \cdot b^m$	$(ab)^3 = (ab)\cdot(ab)\cdot(ab) = a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b = a^3\cdot b^3$	$\sqrt{20} = \sqrt{5\cdot 4} = \sqrt{5}\cdot\sqrt{4} = 2\cdot\sqrt{5}$
7) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$	$\sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$
8) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$	$\frac{a^2}{a^3} = \frac{a\cdot a}{a\cdot a\cdot a} = \frac{1}{a} = a^{2-3} = a^{-1}$	$8^{-1} = \frac{1}{8}$

Ricordiamo inoltre che:

$b\cdot a^m \pm c\cdot a^m = (b \pm c)\cdot a^m$	Infatti: $2\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{5} - 4\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5}\cdot(2+3-4) = \sqrt[3]{5}\cdot 1 = \sqrt[3]{5}$

Attenzione:	
$(a \pm b)^m \neq a^m \pm b^m$, per esempio: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$	infatti: $\sqrt{4+9} = \sqrt{13} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9} = 5$
$(a^m \pm b^m)^{\frac{1}{m}} \neq a \pm b$, per esempio: $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$	infatti: $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \neq 3 + 4 = 7$

Ecco alcuni esempi:

a) $\sqrt[10]{32} = \sqrt[10]{2^5} = 2^{\frac{5}{10}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

b) $\sqrt{\sqrt{a}} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$

c) $\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}$

d) $\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt[6]{b} = b^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}} = b^{\frac{2+3+1}{6}} = b^{\frac{6}{6}} = b$

e) $\frac{\sqrt[6]{x^7\cdot\sqrt{x}}}{\sqrt[10]{\sqrt{x^5}}}\cdot\frac{1}{x\cdot\sqrt{x^{-1}+x^{-2}}}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}} = \frac{(x^7\cdot x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{6}}}{(x^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{10}}}\cdot\frac{1}{x\cdot(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}\cdot(1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{15}{12}}}{x^{\frac{5}{20}}}\cdot\frac{1}{x\cdot(\frac{x+1}{x^2})^{\frac{1}{2}}}\cdot(\frac{x+1}{x})^{\frac{1}{2}} =$

$= \frac{x^{\frac{5}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{1}{x\cdot\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{x}}\cdot\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{\frac{5}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}\cdot 1\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{5}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

Soluzioni

1) Vedi teoria

2) a) $\sqrt{4} = 2$

b) $\sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$

c) $3^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

d) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2+1}{4}} = 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$

e) $\frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{2^2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2^{\frac{2}{6}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}} = 2^0 = 1$

f) $\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$ **e non**: $\sqrt{3^2+4^2} \neq 3+4 = 7$

8 Numeri reali

Situazioni introduttive

1) Riscrivere il numero 0,000 000 05 utilizzando la notazione scientifica.
2) Arrotondare al mezzo punto la nota 4,28.
3) Se l'indicatore di velocità indica un valore di 40 km/h invece di 42,4 km/h, di quanto sbaglia in assoluto e in percentuale?

- **Notazione scientifica**

I numeri molto grandi, o molto piccoli, possono essere scritti nella seguente forma, detta **notazione scientifica**:

5'000'000'000 = $5 \cdot 10^9$, ossia 5 seguito da 9 zeri;
0,000 000 000 3 = $3 \cdot 10^{-10}$, ossia la cifra 3 si trova in decima posizione dopo la virgola.

Questi numeri possono essere rappresentati anche con la calcolatrice. Per esempio: per inserire un milione scritto in notazione scientifica, si dovranno premere, in sequenza, i seguenti tasti della calcolatrice:

$\boxed{1}$ $\boxed{\text{EXP}}$ $\boxed{6}$ oppure $\boxed{1}$ $\boxed{\text{EE}}$ $\boxed{6}$

Il tasto EXP (oppure EE, a dipendenza del modello di calcolatrice) corrisponde a: " **per 10 elevato a**"; il significato della sequenza di tasti sopraindicata è: 1 "*per 10 elevato a*" 6, ossia un milione.

Per esempio: 0,0025 può essere inserito con la sequenza: 2,5 $\boxed{\text{EXP}}$ -3 che corrisponde a: "$2{,}5 \cdot 10^{-3}$".

- **Priorità delle operazioni**

Ricordiamo che la calcolatrice effettua le operazioni con le stesse priorità della matematica (indicate nel capitolo delle operazioni numeriche).

- **Approssimazioni**

Quando si risolvono equazioni, espressioni, problemi, calcolo di superfici geometriche, ecc. **è meglio lasciare nei risultati ottenuti le radici, le frazioni, il π, ecc. ed evitare di trasformare il risultato in numero decimale**. Se invece, per ovvi motivi si deve fornire un risultato con la virgola, allora si deve conoscere la tecnica dell'**arrotondamento**. Consideriamo il valore dell'ultima cifra da arrotondare:

- se tale valore è **maggiore o uguale a 5**, **aumentare di 1 l'ultima cifra** considerata
- se è **minore di 5** lasciare **invariata l'ultima cifra** considerata.

Per esempio: 2,752 approssimato alla seconda cifra decimale diventa 2,75; approssimato alla prima cifra decimale diventa 2,8.

Attenzione alla scrittura: $\sqrt{7} \cong 2{,}6$ e non $\sqrt{7} = 2{,}6$

- **Errori di misura**

Quando si misura una grandezza fisica, il valore numerico ottenuto è un'approssimazione. Ciò significa che il valore misurato presenta un errore che può essere espresso nei modi seguenti:

Errore assoluto:	e_a = (valore misurato) – (valore esatto)
Errore relativo:	$e_r = \dfrac{e_a}{\text{valore esatto}}$

Per esempio, se un termometro indica 37° invece di 36°, abbiamo i seguenti errori:

- errore assoluto: e_a = (valore misurato) – (valore esatto) = 37° – 36° = 1°
- errore relativo: $e_r = \dfrac{e_a}{\text{valore esatto}} = \dfrac{1^o}{36^o} \cong 0{,}028$ che può essere scritto così: $e_r \cong$ 2,8%.

Soluzioni

1) $0{,}00000005 = 5 \cdot 10^{-8}$
2) $4{,}28 \cong 4{,}5$.
3) Errore assoluto: $42{,}4\ \text{km/h} - 40\ \text{km/h} = 2{,}4\ \text{km/h}$

   Errore relativo: $\dfrac{2{,}4\ \text{km/h}}{42{,}4\ \text{km/h}} \cong 0{,}0566 \cong 5{,}7\%$

9 Equazioni numeriche

Situazioni introduttive

1) $(2x+4):6=2 \Rightarrow x=?$

2) $\sqrt{x+2}=3 \Rightarrow x=$

L'equazione è uno strumento matematico che può servire a risolvere problemi di diverso tipo. La conoscenza delle equazioni numeriche renderà più facile l'approccio alle equazioni letterali che incontreremo nei capitoli seguenti. Risolvendo un'equazione si giunge a una soluzione mediante passaggi matematici in successione.

Esempio di equazione numerica: $(x+5):2=8 \Rightarrow x=?$

Le uguaglianze (e le disuguaglianze) tra numeri godono di particolari proprietà dette **leggi di monotonia**.

Prendiamo come esempio la seguente uguaglianza: $\frac{1}{2}+5=\frac{9}{2}+1$

Tutto ciò che è scritto a sinistra viene chiamato **primo membro**, tutto ciò che è scritto a destra viene chiamato **secondo membro**.

Proprietà	**Definizione**	**Esempi**
Prima legge	Un'uguaglianza resta valida se addizioniamo ai due membri uno stesso numero	$\frac{1}{2}+5+(-7)=\frac{9}{2}+1+(-7)$
Seconda legge	Un'uguaglianza resta valida se moltiplichiamo i due membri per uno stesso numero diverso da 0	$\left(\frac{1}{2}+5\right)\cdot\frac{1}{4}=\left(\frac{9}{2}+1\right)\cdot\frac{1}{4}$
Legge di cancellazione	Si tratta dell'operazione inversa rispetto alle due leggi precedenti	$\frac{1}{2}+5\cancel{+3}=\frac{9}{2}+1\cancel{+3}$ Oppure: $\left(\frac{1}{2}+5\right)\cancel{\cdot 2}=\left(\frac{9}{2}+1\right)\cancel{\cdot 2}$

Soluzioni

1)
$$(2x+4):6=2$$
$$2x+4=2\cdot 6$$
$$2x=12-4$$
$$x=\frac{8}{2}$$
$$x=4$$

2)
$$\sqrt{x+2}=3$$
$$x+2=3^2$$
$$x=9-2=7$$