

C) Geometria

In questo capitolo verranno trattati i seguenti argomenti:

- Definizioni (terminologia)
- Simboli
- Angoli (tipi di angoli, forma sessagesimale e decimale)
- I triangoli (classificazione, punti e rette particolari dei triangoli, teorema di Pitagora, triangoli simili)
- I quadrilateri (classificazione, proprietà)
- I cerchi (elementi del cerchio e della circonferenza, angoli interni)
- Il calcolo delle superfici (formule, aree di superfici riconducibili ad aree fondamentali)
- Volumi (definizioni, formule principali)

1 Introduzione

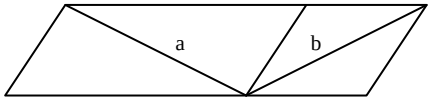
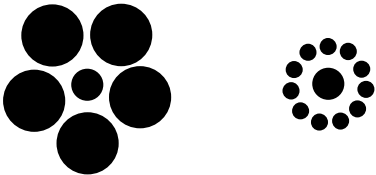
Domande introduttive

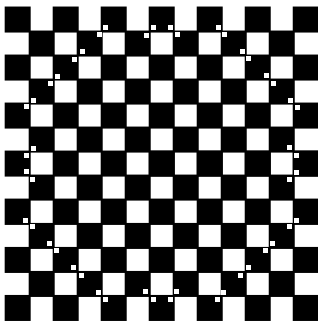
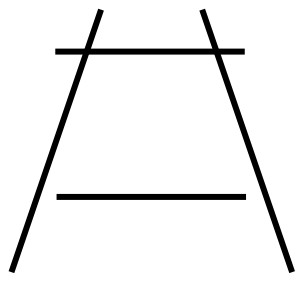
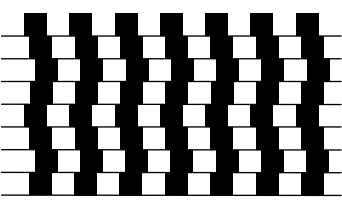
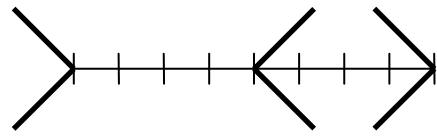
Cosa sono due figure congruenti?
 Cos'è la simmetria assiale?
 Qual è la differenza tra poligono e poligonale?

Il piano didattico disciplinare di matematica prevede le seguenti conoscenze di base per la MPT:

“Geometria: definizioni fondamentali; angoli, triangoli, quadrilateri, poligoni regolari, cerchi, angoli relativi al cerchio, elementi e parti del cerchio e della circonferenza; scomposizione e calcoli di perimetri e di aree delle principali figure piane; riconoscere congruenze e similitudini, conoscere le applicazioni congruenti (trasformazioni isometriche di figure semplici); teorema di Pitagora (semplici addizioni); i solidi principali; i calcoli fondamentali ai solidi più importanti.”

Prima di rivedere regole e formule di geometria elementare, consideriamo un aspetto importante. Infatti, può capitare di studiare teoremi o cercare soluzioni di problemi geometrici la cui verità appare così ovvia che ogni dimostrazione sembra del tutto inutile. Tuttavia valutazioni di questo tipo sono spesso frettolose, basate sull'osservazione di una figura disegnata e non sul ragionamento valido in generale. La sola osservazione e l'evidenza visiva possono dare delle sorprese ... Ecco alcuni esempi che illustrano la necessità della dimostrazione evitando l'errore causato da un'osservazioni approssimativa.

Il segmento a sembra più lungo del segmento b, mentre in realtà hanno la stessa lunghezza.	Il disco centrale di sinistra circondato da dischi più grandi, appare più piccolo di quello centrale di destra. Invece le dimensioni dei due dischi sono uguali.
	

La “sfera” che emerge al centro, in realtà non esiste.	Le linee orizzontali sono lunghe uguali.
	
Le linee orizzontali sono parallele.	I due segmenti hanno la stessa lunghezza.
	

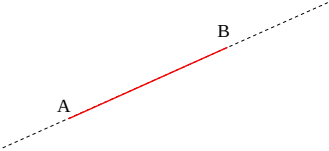
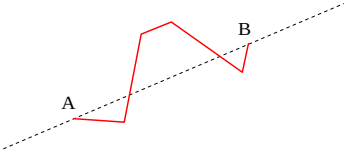
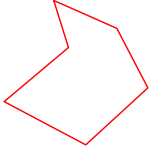
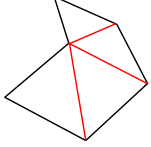
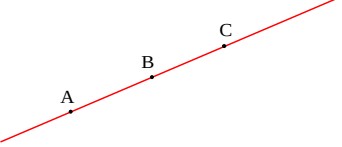
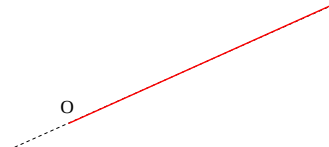
Soluzioni

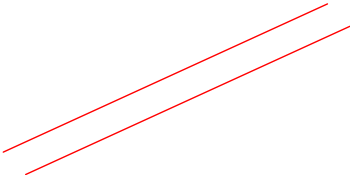
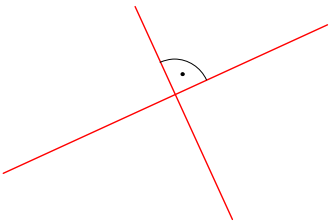
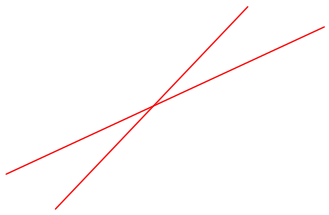
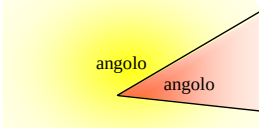
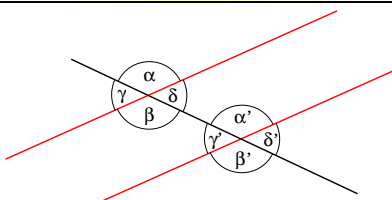
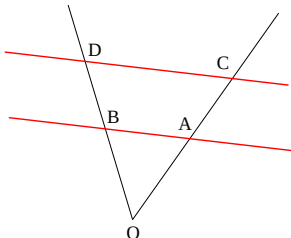
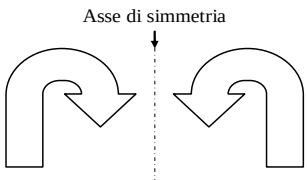
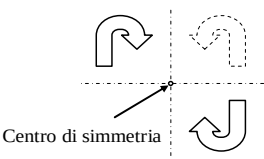
Cosa sono due figure congruenti? Sono due figure sovrapponibili.

Cos'è la simmetria assiale? E' la riproduzione di una figura rispetto a un asse di simmetria (specchio).

Qual è la differenza tra poligonale e poligono? La poligonale è una linea formata da più segmenti consecutivi, detti lati. Il poligono è una figura geometrica il cui contorno è una poligonale chiusa non intrecciata.

1.1 Definizioni della geometria piana

Terminologia	Descrizione	Rappresentazione grafica
Segmento	Linea più breve che congiunge due punti (estremi) A e B.	
Poligonale	Linea formata da più segmenti consecutivi. I segmenti si dicono lati , i loro estremi vertici . I lati non devono mai avere punti in comune, tranne gli estremi (si dice anche: non intrecciata)	
Poligono	Figura geometrica il cui contorno è una poligonale chiusa non intrecciata. I poligoni prendono il nome dal numero di lati che possiedono: triangoli, quadrilateri, pentagoni, esagoni, ...	
Poligono regolare	Poligono con tutti i lati e tutti gli angoli uguali.	
Diagonali di un poligono	Segmenti che congiungono un vertice di un poligono con un vertice non consecutivo (il triangolo non possiede diagonali).	
Retta	I tre punti situati sulla retta si dicono allineati .	
Semiretta	Una delle due parti nelle quali un punto suddivide una retta. Il punto di inizio si chiama origine .	
Figura geometrica	Insieme di punti del piano.	Segmenti, rette, semirette, angoli, linee a mano libera, ...
Congruente	Tutti i punti di una figura combaciano con tutti i punti di una seconda figura.	

Rette parallele	Nel piano sono rette che non si intersecano mai.	
Rette perpendicolari	Rette che si intersecano formando angoli di 90°.	
Rette incidenti	Rette che hanno un solo punto in comune.	
Angolo	Una delle due parti di piano delimitate da due semirette che hanno la stessa origine. L'origine è il vertice dell'angolo.	
Angoli formati da due rette parallele e da una retta trasversale	angoli opposti al vertice: $\alpha = \beta; \gamma = \delta$ angoli corrispondenti: $\alpha = \alpha'; \beta = \beta'; \gamma = \gamma'; \delta = \delta'$	
Proporzioni tra segmenti formati da due parallele e due semirette con la stessa origine	$\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB}; \quad \frac{OC}{OA} = \frac{DC}{AB}$ $\frac{OD}{OB} = \frac{DC}{AB}; \quad \frac{OB}{BD} = \frac{OA}{AC}$	
Simmetria assiale	Trasformazione geometrica speculare (rispetto a un asse di simmetria).	
Simmetria centrale	Trasformazione geometrica rispetto a un centro di simmetria (si tratta di una rotazione di 180°).	

1.2 Simboli utilizzati

Simbolo	Significato
$a, b, c, \dots$	Le lettere minuscole definiscono lunghezze (rette, segmenti, lati, spigoli, ...)
$A, B, C, \dots$	Le lettere maiuscole definiscono punti (vertici, ...)
$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	Le lettere minuscole dell'alfabeto greco definiscono angoli
AB	Segmento di estremi A e B
ABC	Triangolo di vertici A, B, C
$ABCD$	Quadrilatero di vertici A, B, C, D
$ABCDE\dots$	Poligono di vertici $A, B, C, D, E, \dots$
$ a $	Lunghezza del segmento a
$ AB $	Lunghezza del segmento AB
$r \parallel s$	La retta r è parallela alla retta s
$r \perp s$	La retta r è perpendicolare alla retta s
$r \cap s = \{P\}$	r interseca s in P (P è il punto di intersezione di r e s)
$P \in r$	P appartiene a r (P è un punto situato sulla retta r)
$P \notin r$	P non appartiene a r (P è un punto che non si trova sulla retta r)
$\angle(a, b) = \hat{ACB} = \gamma$	Angolo γ del triangolo ABC
P	Perimetro
A	Area di una superficie
A_b	Area di base
A_ℓ	Area laterale
V	Volume
$ABC \approx DEF$	Il triangolo ABC è congruente al triangolo DEF

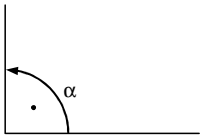
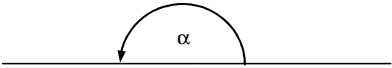
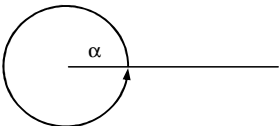
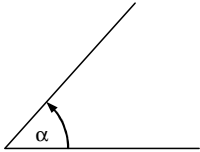
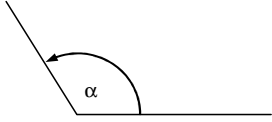
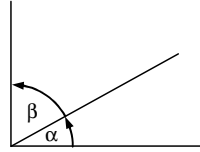
2 Angoli

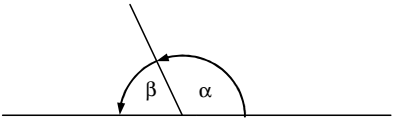
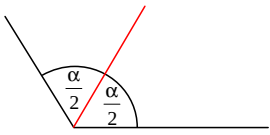
Domanda introduttiva

Quanto vale l'angolo definito dalle bisettrici di due angoli supplementari?

Un capitolo previsto nel programma di MPT è la trigonometria. Esso prevede lo studio delle relazioni tra angoli e lati dei triangoli. La goniometria, studia in modo più generale la relazione tra segmenti e ampiezza degli angoli.

2.1 Tipi di angoli

Denominazione	Significato	Esempio
Angolo retto	$\alpha = 90^\circ$	
Angolo piatto	$\alpha = 180^\circ$	
Angolo giro	$\alpha = 360^\circ$	
Angolo acuto	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	
Angolo ottuso	$90^\circ < \alpha < 360^\circ$	
Angoli complementari	La somma dei due angoli è 90°	

Angoli supplementari	La somma dei due angoli è 180°	
Bisettrice di un angolo	Retta che divide un angolo in due parti uguali	

Gli angoli si possono esprimere con le seguenti forme:

forma sessagesimale: $20,5^\circ$ corrisponde a $20^\circ 30'$

forma decimale: $42^\circ 15'$ corrisponde a $42,25^\circ$.

Analogamente a quanto avviene con l'orario, le ore 2 e 15 minuti corrispondono alle “due e un quarto” ossia 2,25 ore. Viceversa le “cinque e mezza” corrispondono alle ore 5 e 30 minuti ossia 5,5 ore.

Come passare da una forma all'altra? Vediamolo con i seguenti due esempi:

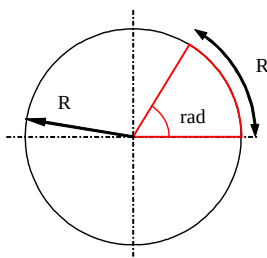
$$\begin{aligned}
 1) \quad 56,48^\circ &= \\
 &= 56^\circ + 0,48^\circ = 56^\circ + (0,48 \cdot 60)' = 56^\circ + 28,8' = 56^\circ + 28' + (0,8 \cdot 60)'' = 56^\circ + 28' + 48'' \\
 &\text{che si scrive: } 56^\circ 28' 48''
 \end{aligned}$$

$$2) \quad 36^\circ 20' 42'' = 36^\circ + \left(\frac{20}{60}\right)^\circ + \left(\frac{42}{3600}\right)^\circ = 36,345^\circ$$

2.2 Il radiante

Oltre alla suddivisione di un angolo giro in 360° , è possibile esprimere la misura di un angolo con un'altra unità di misura: il **radiante**.

Calcolando con le ampiezze degli angoli in gradi, abbiamo già notato la complicazione nell'utilizzo dei sottomultipli (gradi, primi, secondi). Di conseguenza i calcoli saranno facilitati esprimendo la misura degli angoli in radianti. **Il radiante** è la misura di un angolo con il vertice nel centro di una circonferenza che definisce un arco di lunghezza uguale al raggio:



Osservazione: il radiante non si esprime con un'unità di misura perché risulta dal rapporto fra la lunghezza definita sulla circonferenza diviso il raggio: $1 \text{ radiante} = \frac{R \text{ [m]}}{R \text{ [m]}} = 1[-]$.

Infatti, sul cerchio di raggio $R = 1$, la misura in radianti corrisponde alla lunghezza dell'arco.

Non dovrebbero sussistere confusioni con le unità di misura poiché gli angoli espressi in gradi si scrivono così: $\alpha = 5^\circ$, mentre gli angoli espressi in radianti si scrivono così: $\alpha = 5$.

Un angolo al centro di 360° corrisponde ad un angolo giro che definisce un arco equivalente all'intera circonferenza, cioè 2π . Quindi:

$$360^\circ = 2\pi \left(= \frac{2\pi \cdot R}{R} \right) \Rightarrow \pi = 180^\circ$$

Grazie a questa uguaglianza si possono trasformare gli angoli da radianti in gradi nel modo seguente:

per esempio un angolo in radianti di $\frac{\pi}{4}$ corrisponde a: $\frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$.

Viceversa la trasformazione da gradi in radianti viene svolta utilizzando una proporzione:

per esempio un angolo di 60° corrisponde a: $\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{x}{60^\circ} \Rightarrow x = 60^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}$.

Ecco alcune corrispondenze tra angoli in gradi e radianti:

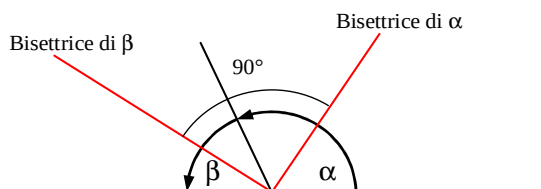
Angolo in gradi	0°	30°	45°	60°	90°	360°
Angolo in radianti	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	2π

Osservazione:

nei calcoli con i radianti lasciare il π e non sostituire con 3,14... Per esempio: $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ e non $90^\circ \cong 1,57$.

Soluzione

Quanto vale l'angolo definito dalle bisettrici di due angoli supplementari?



L'angolo vale esattamente 90° .

3 Triangoli

La padronanza delle caratteristiche e delle proprietà dei triangoli è fondamentale per capire il capitolo della trigonometria, uno dei capitoli di geometria non trattato nel programma di Scuola Media ma previsto nel programma MPT.

3.1 Tipi di triangoli

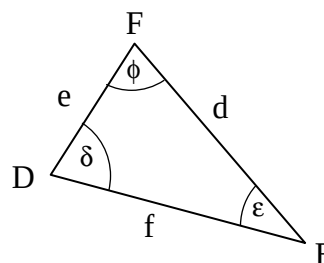
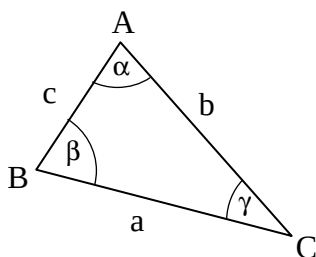
Domande introduttive

Qual è la differenza tra un triangolo generico (senza particolarità) e un triangolo equilatero?
Un triangolo può essere rettangolo e isoscele?

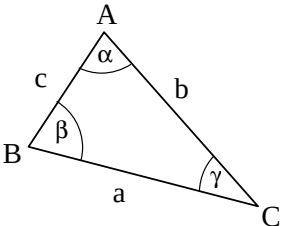
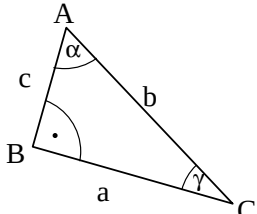
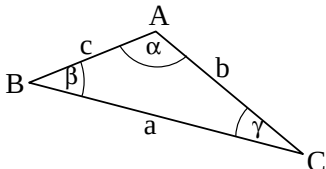
Rappresentazione e denominazioni del triangolo:

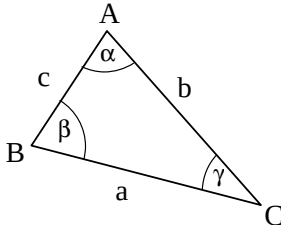
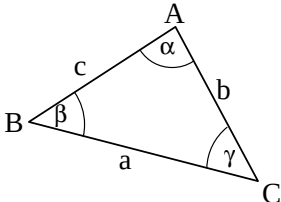
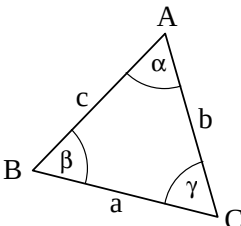
Elementi del triangolo	Denominazioni
Vertici	Con lettere maiuscole (A, B, C, D, ...), in senso antiorario.
Lati	Con le lettere minuscole (a, b, c, d, ...): i lati assumono la lettera corrispondente al vertice che sta di fronte al lato.
Angoli	Con le lettere minuscole dell'alfabeto greco corrispondenti alle lettere dei vertici (α , β , γ , δ , ...). La somma degli angoli vale sempre 180° : $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

Esempi:



I triangoli possono essere classificati secondo le caratteristiche seguenti:

secondo gli angoli interni		
Triangolo acutangolo	Ha tre angoli acuti ($\alpha < 90^\circ, \beta < 90^\circ, \gamma < 90^\circ$)	
Triangolo rettangolo	Ha un angolo retto ($\beta = 90^\circ$) $\alpha + \gamma = 90^\circ$	
Triangolo ottusangolo	Ha un angolo ottuso ($\alpha > 90^\circ$)	

secondo i lati		
Triangolo generico (scaleno)	Ha tre lati di lunghezza diversa: $a \neq b \neq c$ Di conseguenza: $\alpha \neq \beta \neq \gamma$	
Triangolo isoscele	Ha almeno due lati lunghi uguali, per esempio: $b = c$ Di conseguenza: $\beta = \gamma$	
Triangolo equilatero	Ha tutti i lati lunghi uguali: $a = b = c$ Di conseguenza: $\alpha = \beta = \gamma$	

Soluzioni

Qual è la differenza tra un triangolo generico e un triangolo equilatero?

Un triangolo generico ha tre lati di diversa lunghezza e i tre angoli di diverse ampiezze. Il triangolo equilatero ha i tre lati lunghi uguali e i tre angoli di medesima ampiezza (60°).

Un triangolo può essere rettangolo e isoscele?

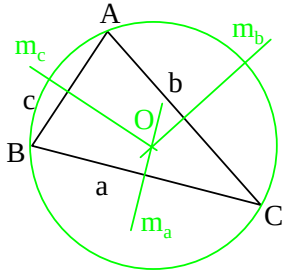
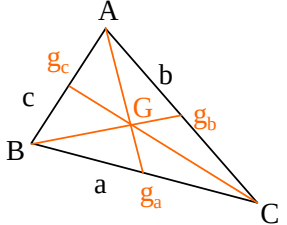
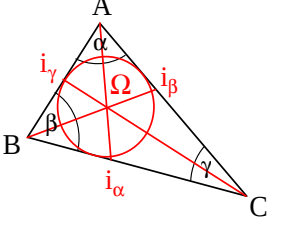
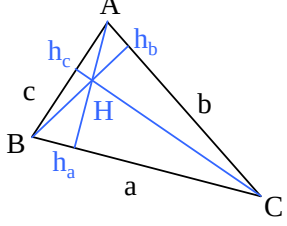
Sì, i due lati lunghi uguali definiscono l'angolo di 90° .

3.2 Punti e rette particolari dei triangoli

Situazione introduttiva

Si desidera costruire una casa triangolare (10 m; 5 m; 8 m) (puoi provare a disegnarla in scala).

- Come determinare il punto esatto sul quale va posizionata la gru che deve raggiungere i tre vertici della casa?
- Dove si deve posare il pilastro nella cantina (che, assieme ai muri perimetrali, deve sostenere il piano terreno) sapendo che esso deve trovarsi nella posizione migliore per sostenere il pavimento (centro di gravità)?
- Dove si trova il centro di un cerchio ornamentale che il piastrellista vuole creare sul pavimento del piano terreno in modo tale che il cerchio passi alla stessa distanza dai tre muri perimetrali?

Denominazione	Simbolo	L'intersezione delle rette corrisponde al	Esempi
Mediatrici Assi dei tre lati .	m	Circocentro (cerchio circoscritto, abbreviato con O) Osservazione: il circocentro può trovarsi internamente, esternamente o su un lato del triangolo.	
Mediane Congiungono il vertice con il punto medio del lato opposto.	g	Baricentro (centro di gravità, abbreviato con G)	
Bisettrici Semirette che suddividono l'angolo in due parti uguali.	i	Incentro (cerchio inscritto, abbreviato con Ω)	
Altezze Segmenti che dal vertice scendono perpendicolarmente sul lato opposto.	h	Ortocentro (abbreviato con H)	

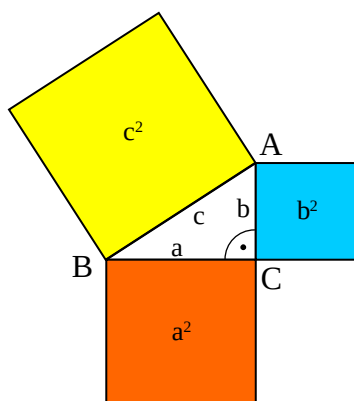
Soluzione

- La gru si troverà sul circocentro: corrisponde all'intersezione delle tre mediatrici.
- Il pilastro va posato in corrispondenza del baricentro: corrisponde all'intersezione delle tre mediane.
- Il centro del cerchio corrisponde all'incentro, ossia all'intersezione delle bisettrici.

3.3 Il teorema di Pitagora**Domande introduttive**

- 1) Con una corda suddivisa esattamente in 12 parti uguali, è possibile definire un triangolo rettangolo senza l'aiuto di nessuno strumento geometrico (senza squadra, gonimetro, ...)?
- 2) Se il lato di un triangolo equilatero è lungo 1, quanto vale la lunghezza della sua altezza?

In ogni triangolo **rettangolo** la somma dei quadrati definiti dai cateti è uguale al quadrato definito dall'ipotenusa:



In riferimento al disegno abbiamo, in forma analitica:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Dalla quale si estraggono le seguenti formule (sempre in riferimento al disegno sopra):

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$
$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$
$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2}$

Naturalmente se le lettere dei lati del triangolo vengono scambiate, anche le formule devono essere adattate di conseguenza.

Soluzioni

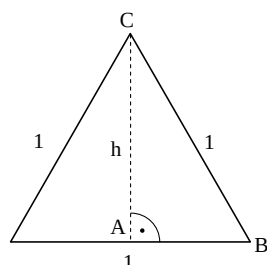
- 1) Con una corda suddivisa esattamente in 12 parti uguali, è possibile definire un triangolo rettangolo senza l'aiuto di nessuno strumento geometrico (senza squadra, gonimetro, ...)?

I tre lati del triangolo saranno costituiti da un tratto di corda comprendente, rispettivamente, 3, 4 e 5 parti uguali.

In questo modo, avremo la seguente relazione: $3^2 + 4^2 = 5^2$, corrispondente al Teorema di Pitagora e realizzando così un triangolo rettangolo.

- 2) Se il lato di un triangolo equilatero è lungo 1, quanto vale la lunghezza della sua altezza?

Analizzando il seguente disegno, in particolare metà triangolo equilatero (triangolo ABC) e applicando il teorema di Pitagora, abbiamo:



$$h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3.4 Triangoli simili

Situazione introduttiva

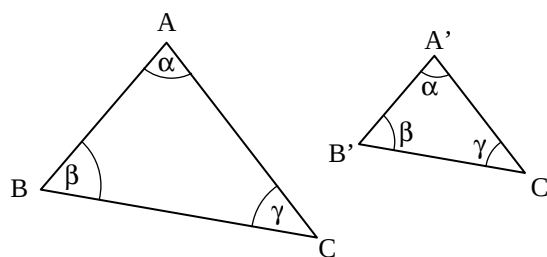
In un pomeriggio soleggiato una persona alta 1,80 m riesce a misurare la lunghezza dell'ombra proiettata sul terreno che risulta essere di due metri. Quanto è alto un obelisco vicino a questa persona che proietta un'ombra sullo stesso terreno di 5 m?

Triangoli simili

I triangoli ABC e A'B'C' sono **simili** poiché l'ampiezza dei tre angoli è la stessa.
Valgono quindi le seguenti relazioni:

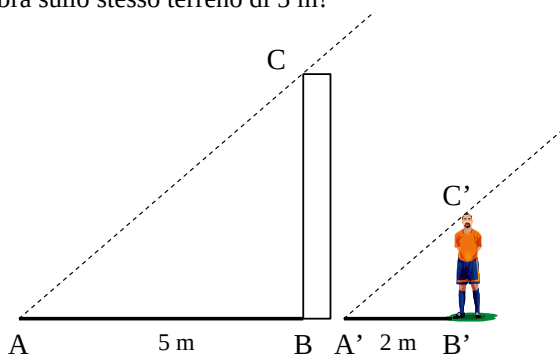
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

dalle quali si possono dedurre altre uguaglianze.



Soluzione

In un pomeriggio soleggiato una persona alta 1,80 m riesce a misurare la lunghezza dell'ombra proiettata sul terreno che risulta essere di due metri. Quanto è alto un obelisco vicino a questa persona che proietta un'ombra sullo stesso terreno di 5 m?



Il Sole, trovandosi a una distanza molto grande dalla Terra, proietta i suoi raggi luminosi in modo tale che essi possono essere ritenuti paralleli (quindi il raggio rappresentato dal tratto AC è parallelo al raggio rappresentato da A'C'). Di conseguenza i triangoli ABC e A'B'C' sono simili. Possiamo quindi scrivere la seguente relazione:

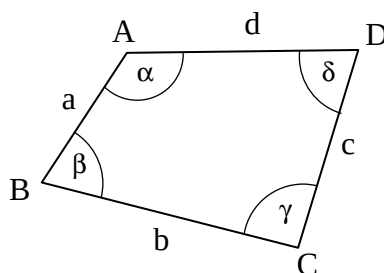
$$\frac{CB}{AB} = \frac{C'B'}{A'B'} \Rightarrow CB = AB \cdot \frac{C'B'}{A'B'} = 5 \text{ m} \cdot \frac{1,80 \text{ m}}{2 \text{ m}} = 4,50 \text{ m}$$

4 Quadrilateri

La rappresentazione e la denominazione degli elementi di un quadrilatero è la seguente:

Elementi del quadrilatero	Denominazioni
Vertici	Con lettere maiuscole (A, B, C, D, ...).
Lati	Con le lettere minuscole (a, b, c, d, ...).
Angoli	Con le lettere minuscole dell'alfabeto greco corrispondenti alle lettere dei vertici (α , β , γ , δ , ...). La somma degli angoli vale sempre 360° : $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$.

Esempio:

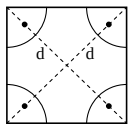
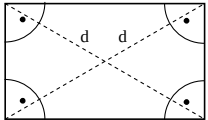
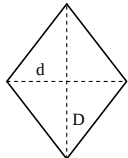
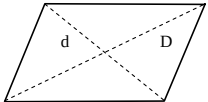
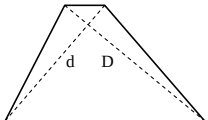
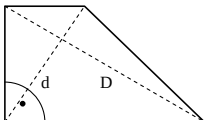
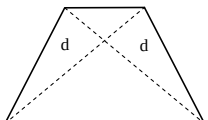
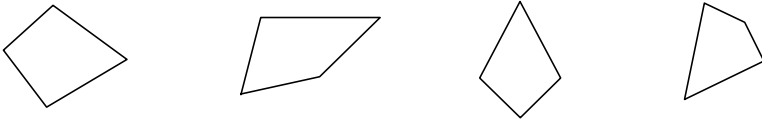


4.1 Tipi di quadrilateri

Domande introduttive

Quali quadrilateri fanno parte della categoria dei parallelogrammi?
Cosa differenzia un parallelogramma generico (romboide) da un rombo?

I quadrilateri possono essere classificati nel modo seguente:

Quadrilateri: poligoni con 4 lati	Parallelogrammi: lati opposti paralleli	Quadrato (lati lunghi uguali e diagonali lunghe uguali, quattro angoli retti).	
		Rettangolo (lati opposti lunghi uguali e diagonali lunghe uguali, quattro angoli retti).	
		Rombo (lati lunghi uguali e diagonali di diversa lunghezza, angoli opposti uguali).	
		Parallelogramma generico (romboide)	
	Trapezi: due lati paralleli	Trapezio generico (chiamato anche scaleno: lati, angoli e diagonali di diversa lunghezza).	
		Trapezio rettangolo (ha almeno un angolo retto).	
		Trapezio isoscele (lati obliqui lunghi uguali, diagonali uguali).	
			

Soluzioni

Quali quadrilateri fanno parte della categoria dei parallelogrammi?

I quadrilateri che sono anche parallelogrammi sono: quadrati, rettangoli, rombi, romboidi.

Cosa differenzia un parallelogramma generico (romboide) da un rombo?

Il rombo ha quattro lati uguali mentre il romboide ha due coppie di lati lunghi uguali.

Le diagonali del rombo sono perpendicolari, quelle del romboide no.

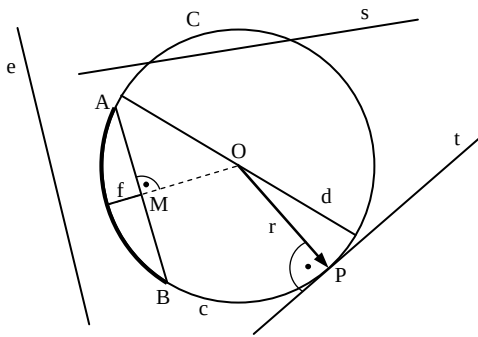
5 Cerchio

5.1 Elementi e parti del cerchio e della circonferenza

Situazione introduttiva

Disegnare tre punti distinti (non allineati) A, B e C e tracciare la circonferenza che passi da A, B e C.

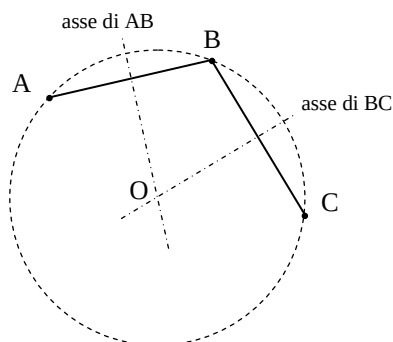
Nella tabella seguente sono indicati denominazioni e simboli riguardanti il cerchio:

Terminologia	Denominazioni	Esempio
Circonferenza (perimetro)	c	
Cerchio (superficie)	C	
Centro	O	
Raggio	r	
Diametro	d	
Corda	AB	
Punto medio della corda	M	
Arco	AB	
Settore circolare	$\widehat{AOB}$	
Freccia	f	
Retta secante	s	
Retta tangente (nel punto P la retta tangente forma un angolo retto con il raggio)	t	
Retta esterna	e	
Punto di tangenza	P	
Punti di intersezione	A, B	

Il **segmento circolare** corrisponde alla superficie compresa tra la corda e l'arco definito dalla corda stessa.

Soluzione

Disegnare tre punti distinti (non allineati) A, B e C e tracciare la circonferenza che passi da A, B e C.



- 1) Dopo aver disegnato i tre punti A, B e C, si tracciano i segmenti AB e BC (dette “corde”).
- 2) Si definiscono gli assi dei segmenti AB e BC (rette perpendicolari passanti per il punto medio dei rispettivi segmenti).
- 3) I due assi si intersecano nel punto O (centro della circonferenza).
- 4) Il raggio della circonferenza vale: $R = OA = OB = OC$.

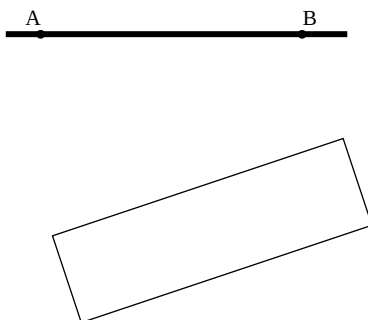
5.2 Angoli interni al cerchio

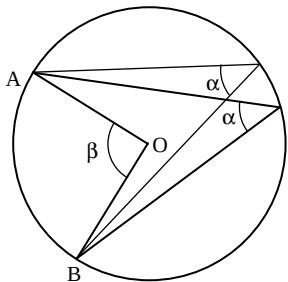
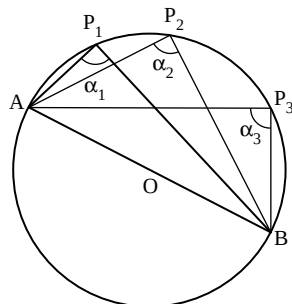
Situazione introduttiva

Supponiamo che un tratto di ferrovia compreso tra due punti A e B debba essere controllato con una telecamera. Le condizioni che devono essere rispettate sono:

- la telecamera deve essere posata all'interno del terreno indicato con il rettangolo;
- la telecamera ha un campo visivo (angolo di apertura) di 60° e deve essere utilizzato completamente, ossia A e B devono essere all'estremità del campo visivo.

Dove si trovano tutti i possibili punti nei quali si potrebbe posare la telecamera?

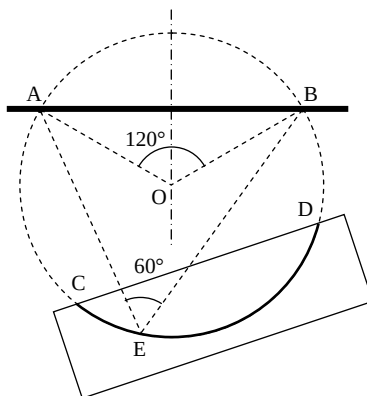


	L'angolo α si dice angolo alla circonferenza. L'angolo β si dice angolo al centro corrispondente dell'angolo α. $\beta = 2\alpha$
	Gli angoli α_1, α_2 e α_3, sono inscritti in una semicirconferenza. Come tali, le loro ampiezze sono la metà di quella dell'angolo al centro, ossia la metà di 180°. Perciò: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 90^\circ$ Ogni angolo inscritto in una semicirconferenza è retto.

Soluzione

I punti A e B devono trovarsi su una circonferenza e definire un angolo di 60° con il punto in cui verrà posata la telecamera. Si tratta quindi di trovare il centro O della circonferenza in modo tale che esso, con i punti A e B, definisca un angolo di 120° . Si procede quindi nel modo seguente:

- 1) si traccia l'asse del segmento AB (il centro del cerchio si trova su questo asse);
- 2) si determina il centro O in modo tale che l'angolo $\widehat{AOB}$ sia di 120° ;
- 3) si disegna il cerchio di centro O e di raggio OA oppure OB;
- 4) l'arco della circonferenza compreso tra C e D determina **l'angolo alla circonferenza** che vale la metà dell'**angolo al centro**, ossia 60° .



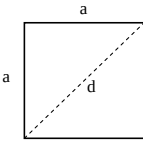
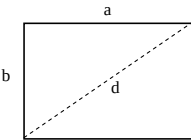
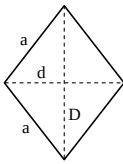
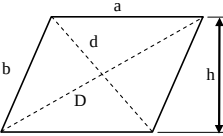
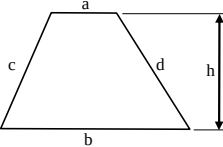
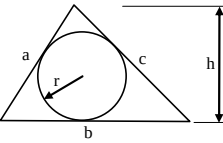
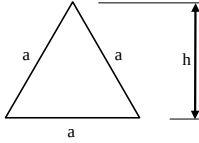
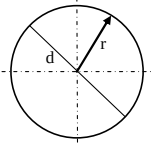
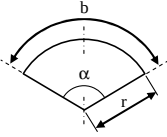
Di conseguenza tutti i punti sulla circonferenza compresi tra C e D (per esempio il punto E) delimitano l'arco sul quale è possibile posare la telecamera soddisfacendo le condizioni citate: il tratto AB è visto con un angolo di 60° e la telecamera è situata nel terreno indicato.

6 Calcolo di superfici

Domanda introduttiva

E' possibile calcolare la superficie di un triangolo generico conoscendo soltanto la lunghezza dei suoi tre lati?

Ricordiamo nella pagina seguente le principali formule per il calcolo di lunghezze e superfici:

Quadrato	$P = 4 \cdot a$ $A = a^2$ $d = a \cdot \sqrt{2}$	
Rettangolo	$P = 2 \cdot (a + b)$ $A = b \cdot a$ $d = \sqrt{a^2 + b^2}$	
Rombo	$P = 4 \cdot a$ $A = \frac{D \cdot d}{2}$	
Romboide	$P = 2 \cdot (a + b)$ $A = a \cdot h$	
Trapezio	$P = a + b + c + d$ $A = \left(\frac{a + b}{2} \right) \cdot h$	
Triangolo	$P = a + b + c; \quad s = \text{semiperimetro} = \frac{P}{2}$ $A = \frac{b \cdot h}{2} = r \cdot s = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$	
Triangolo equilatero	$P = 3 \cdot a$ $h = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ $A = \frac{a \cdot h}{2} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$	
Cerchio	$c = r \cdot 2 \cdot \pi = d \cdot \pi$ $C = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2}{4} \cdot \pi$	
Settore circolare	$b = r \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = d \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$ $A = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{d^2}{4} \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$	

Soluzione

E' possibile calcolare la superficie di un triangolo scaleno conoscendo soltanto la lunghezza dei suoi tre lati?

Sì, utilizzando la seguente formula:

$$P = a + b + c; \quad s = \text{semiperimetro} = \frac{P}{2}.$$

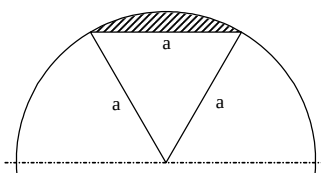
La superficie del triangolo vale quindi:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

6.1 Aree di figure riconducibili alla combinazione di aree fondamentali

Situazione introduttiva

Calcolare la superficie della seguente area tratteggiata esprimendo la soluzione in funzione della lettera **a**:

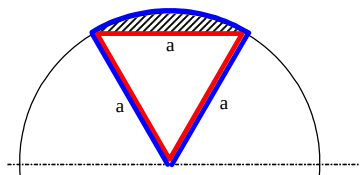


Vediamo alcuni esempi di aree apparentemente difficili da calcolare ma che sono riconducibili alla combinazione di aree fondamentali e, di conseguenza, risolvibili con le formule del paragrafo precedente. Per facilitare la risoluzione, proponiamo il metodo seguente:

- | |
|---|
| 1) individuazione delle aree parziali fondamentali; |
| 2) scrittura della formula simbolica generale; |
| 3) calcolo delle aree parziali (semplificare il risultato); |
| 4) calcolo dell'area richiesta. |

Nei seguenti esempi, applicheremo il metodo sopraindicato per calcolare la superfici tratteggiate in funzione della lettera **a**.

Esempio 1 (soluzione della situazione introduttiva):



Soluzione:

- 1) L'area tratteggiata (detta segmento circolare) è la differenza tra il settore circolare blu (di raggio a e di angolo 60°) e il triangolo equilatero rosso di lato a , quindi:

$$2) \quad A_t = A_{\text{set}} - A_{\text{tri}}$$

- 3) Calcoliamo le aree parziali:

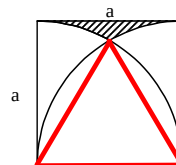
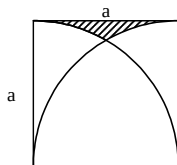
$$A_{\text{set}} = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = a^2 \cdot \pi \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} = a^2 \cdot \frac{\pi}{6}$$

$$A_{\text{tri}} = \ell^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

L'area tratteggiata vale quindi:

$$4) \quad A_t = A_{\text{set}} - A_{\text{tri}} = a^2 \cdot \frac{\pi}{6} - a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = a^2 \cdot \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

Esempio 2:



Soluzione:

- 1) L'area tratteggiata è la differenza tra il quadrato, il triangolo rosso e i due settori circolari, come indicato nella figura accanto, ossia:

$$2) \quad A_t = A_{\square} - A_{\Delta} - 2 \cdot A_{\text{set}}$$

- 3) Calcoliamo le aree parziali:

$$A_{\square} = \ell^2 = a^2$$

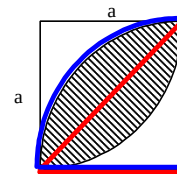
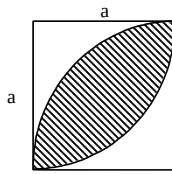
$$A_{\Delta} = \ell^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$A_{\text{set}} = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = a^2 \cdot \pi \cdot \frac{30^\circ}{360^\circ} = a^2 \cdot \frac{\pi}{12}$$

L'area tratteggiata vale quindi:

$$4) \quad A_t = A_{\square} - A_{\Delta} - 2 \cdot A_{\text{set}} = a^2 - a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} - 2 \cdot \left(a^2 \cdot \frac{\pi}{12} \right) = a^2 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6} \right)$$

Esempio 3:



Soluzione:

- 1) L'area tratteggiata è il doppio della differenza tra il settore circolare blu di angolo 90° e il triangolo rettangolo rosso, come indicato nella figura accanto, ossia:

$$2) \quad A_t = 2 \cdot (A_{\text{◊}} - A_{\Delta})$$

- 3) Calcoliamo le aree parziali:

$$A_{\text{◊}} = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = a^2 \cdot \pi \cdot \frac{90^\circ}{360^\circ} = a^2 \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$A_{\Delta} = \frac{b \cdot h}{2} = a^2 \cdot \frac{1}{2}$$

L'area tratteggiata vale quindi:

$$4) \quad A_t = 2 \cdot (A_{\text{◊}} - A_{\Delta}) = 2 \cdot \left(a^2 \cdot \frac{\pi}{4} - a^2 \cdot \frac{1}{2} \right) = a^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = a^2 \cdot \frac{\pi - 2}{2}$$

7 Volumi

7.1 Definizioni

Un **poliedro** è una figura geometrica delimitata da poligoni (dette **facce del poliedro**) congiunti lungo i lati.

I lati della facce si dicono **spigoli**.

I vertici della facce (per esempio: V) si dicono **vertici**.

L'insieme di tutte le facce si chiama **superficie totale**.

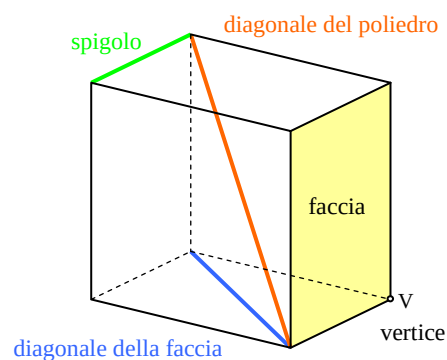
Ogni faccia è costituita da un poligono: se il poligono non è un triangolo, le facce presentano le **diagonali della faccia**.

Le diagonali che congiungono due vertici (situati su due diverse facce) sono le **diagonali del poliedro**.

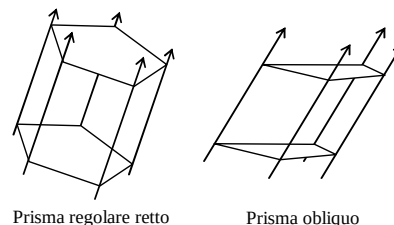
Un poliedro con tutte le facce costituite da poligoni regolari uguali si chiama **poliedro regolare** (es.: cubo, tetraedro, ...)

Alcuni poliedri prendono il nome dal numero di facce che possiedono. Esempi:

- **tetraedro** : 4 facce
- **esaedro** : 6 facce
(oppure **parallelepipedo**; caso particolare : **cubo**)
- **ottaedro**: 8 facce
- **dodecaedro**: 12 facce
- **icosaedro**: 20 facce



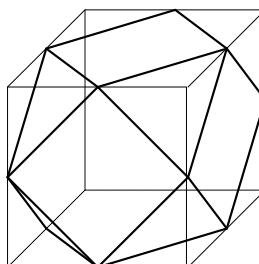
Un **prisma** è un solido ottenuto traslando un poligono detto base del prisma. Se la traslazione avviene perpendicolare alla base si tratta di un **prisma retto** altrimenti si parla di **prisma obliquo**. Se il poligono traslato è regolare si tratta di un **prisma regolare**.



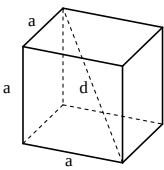
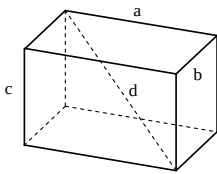
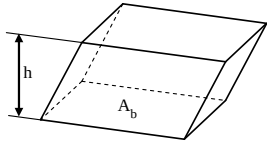
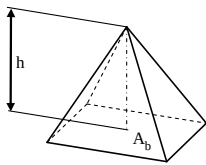
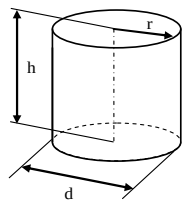
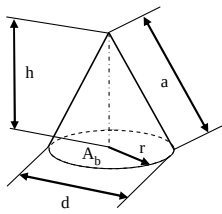
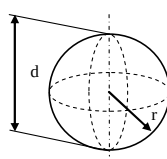
7.2 Calcolo di volumi fondamentali

Situazione introduttiva

Calcolare il volume del solido definito da un cubo di spigolo a , al quale vengono smussati gli otto vertici nel modo indicato:

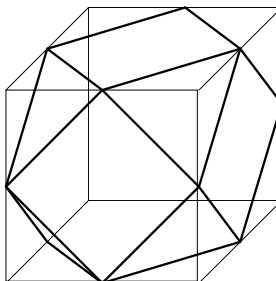


Ricordiamo le principali formule per il calcolo di superfici e volumi dei principali solidi:

Cubo	$A_b = a^2$ $A_t = 6 \cdot a^2$ $d = a \cdot \sqrt{3}$ $V = a^3$	
Parallelepipedo	$A_b = a \cdot b$ $A_t = 2 \cdot (ab + bc + ac)$ $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ $V = a \cdot b \cdot c$	
Parallelepipedo generico	$V = A_b \cdot h$	
Piramide	$A_t = A_b + A_\ell$ $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$	
Cilindro	$A_b = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2}{4} \cdot \pi$ $A_\ell = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h = d \cdot \pi \cdot h$ $A_t = 2 \cdot A_b + A_\ell$ $V = A_b \cdot h$	
Cono	$a = \text{apotema} = \sqrt{h^2 + r^2}$ $A_b = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2}{4} \cdot \pi$ $A_\ell = r \cdot \pi \cdot a$ $A_t = A_b + A_\ell$ $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$	
Sfera	$A_t = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$ $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$	

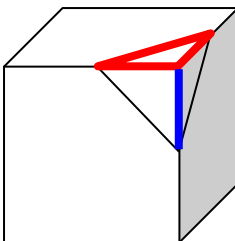
Soluzione

Calcolare il volume del solido definito da un cubo di spigolo a , al quale vengono smussati gli otto vertici nel modo indicato:



Si tratta di calcolare il volume di una delle 8 piramidi tolte e sottrarre dal volume del cubo il volume delle 8 piramidi. Come calcolare il volume di una piramide?

Si può prendere in considerazione la figura seguente:



La superficie di base è l'area del triangolo indicato in rosso, l'altezza h in blu. Abbiamo:

$$A_b = \frac{\ell \cdot \ell}{2} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} = \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{8} \quad \text{inoltre: } h = \frac{a}{2}$$

Il volume di una piramide vale quindi:

$$V_{\text{piramide}} = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{\frac{a^2}{8} \cdot \frac{a}{2}}{3} = \frac{a^3}{48}$$

Il volume richiesto risulta allora:

$$V = V_{\text{cubo}} - 8 \cdot V_{\text{piramide}} = a^3 - 8 \cdot \frac{a^3}{48} = a^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) = a^3 \cdot \frac{5}{6}$$

1. INTRODUZIONE

- 1) Spiegare con un esempio il significato di:

segmento, poligonale, poligono (regolare o irregolare, diagonali), retta, semiretta, figura geometrica, congruente, rette parallele, rette perpendicolari, rette incidenti, proprietà degli angoli definiti da due rette incidenti non perpendicolari, angolo, proporzioni tra segmenti formati da due rette parallele con due segmenti paralleli, simmetria assiale e centrale.

- 2) Completare la seguente tabella:

Simbolo	Significato
a, b, c, ...	Con le lettere minuscole definiamo:
A, B, C, ...	Con le lettere maiuscole definiamo:
$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	Con le lettere dell'alfabeto greco definiamo:
.....	Lunghezza del segmento AB
$r // s$	La retta r è
$r \perp s$	La retta r è
$r \cap s = \{ P \}$	
$P \in r$	
.....	P non appartiene a r (P è un punto che non si trova sulla retta r)
.....	Angolo γ del triangolo ABC
.....	Perimetro
.....	Area di una superficie
A_b	
A_f	
V	
.....	Il triangolo ABC è congruente al triangolo DEF

3) Disegnare:

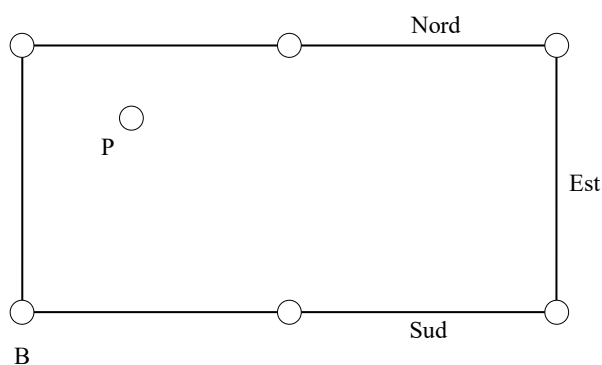
- a) un segmento compreso tra due punti distinti A e B;
- b) una poligonale con 4 lati (denomina i vertici della poligonale); come si chiamano i segmenti che costituiscono la poligonale? Come si chiamano gli estremi dei segmenti della poligonale?
- c) un poligono di 5 lati; da che cosa è caratterizzato un poligono?
- d) un poligono regolare di 6 lati;
- e) le diagonali del poligono nel caso c);
- f) una figura geometrica qualsiasi;
- g) una figura congruente alla figura del caso f);
- h) una figura simile alla figura del caso f);
- i) due rette incidenti;
- j) due rette parallele;
- k) due rette perpendicolari.

4) Spiegare e disegnare un esempio di simmetria assiale e un esempio di simmetria centrale.

5) Nel gioco del biliardo americano, la conclusione consiste nel imbucare la boccia dopo aver colpito tre sponde. Sapendo che l'ampiezza dell'angolo di rimbalzo è la stessa dell'angolo di arrivo provare a determinare:

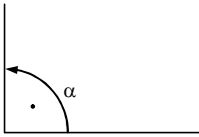
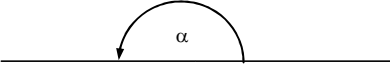
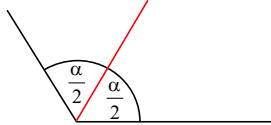
- dapprima dove colpire la sponda Nord affinché la boccia P entri nella buca centrale a Sud;
- poi il tragitto che deve percorrere la boccia P per colpire le sponde nella sequenza Sud-Est-Nord e poi entrare nella buca B.

(Suggerimento: utilizzare la simmetria assiale)

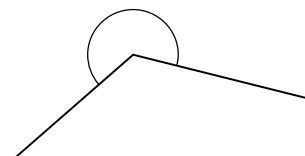
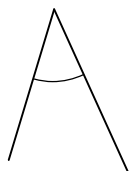
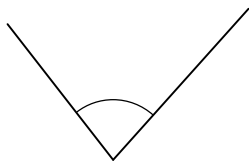


2. ANGOLI

1) Completare la seguente tabella:

Denominazione	Significato	Esempio
Angolo retto	$\alpha = 90^\circ$	
.....	$\alpha = \dots\dots\dots$	
Angolo giro	$\alpha = \dots\dots\dots$	
.....	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	
Angolo ottuso		
Angoli complementari		
.....	La somma dei due angoli è 180°	
.....		

- 2) Tracciare le bisettrici dei rispettivi angoli:



- 3) Disegnare due angoli complementari e le relative bisettrici. Quanto vale l'angolo definito dalla due bisettrici?
- 4) Un trapezio isoscele ha due angoli di ampiezza 57° . Qual è l'ampiezza degli altri suoi angoli interni?
- 5) Una diagonale di un rettangolo forma un angolo di 36° con un lato. Trova l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalle diagonali.
- 6) Considerando lo spostamento reale delle due lancette di un orologio analogico, calcolare l'angolo minore formato dalle lancette quando sono le ore:
 a) 2:30 b) 7:50 c) 16:42
 d) A che ore, minuti e secondi, per la prima volta dopo mezzogiorno, la lancetta delle ore si sovrappone esattamente a quella dei minuti?
- 7) Cosa significa un angolo di $48^\circ 45' 30''$ (forma sessagesimale) ? E un angolo di $62,4^\circ$ (forma decimale) ? Effettuare le rispettive conversioni, scrivendo i calcoli necessari (provare anche la conversione diretta con la calcolatrice).
- 8) Convertire i seguenti angoli dalla forma sessagesimale nella forma decimale e viceversa: (scrivere tutti i calcoli necessari)
 a) $1^\circ 23' 45'' =$ b) $290^\circ 22' 58'' =$
 c) $18,24^\circ =$ d) $165,6842^\circ =$
- 9) Completare la seguente tabella:

Angolo in gradi	60°		20°		270°		342°	
Angolo in radianti		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{5}$

3. TRIANGOLI

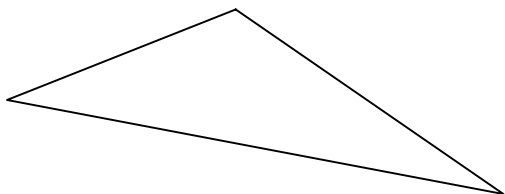
1) Disegnare:

- a) un triangolo acutangolo;
- b) un triangolo rettangolo;
- c) un triangolo ottusangolo;
- d) un triangolo generico;
- e) un triangolo isoscele;
- f) un triangolo equilatero.

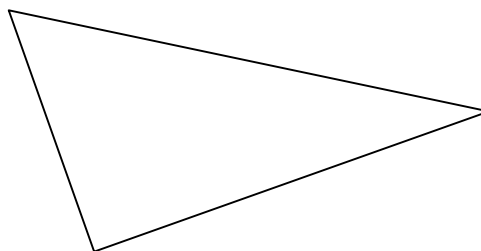
2) Per ciascuno dei seguenti triangoli:

- a) indicare il tipo di triangolo (secondo gli angoli e secondo i lati);
- b) disegnare le loro altezze, mediane, mediatrici e bisettrici usando 4 colori diversi;
- c) disegnare il cerchio circoscritto nel primo triangolo;
- d) disegnare il cerchio inscritto nel secondo triangolo;
- e) disegnare il baricentro nel terzo triangolo;
- f) disegnare l'ortocentro nel quarto triangolo.

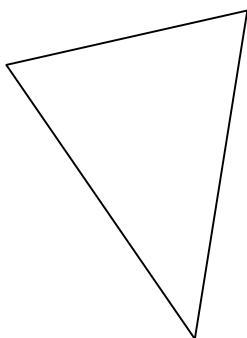
1)



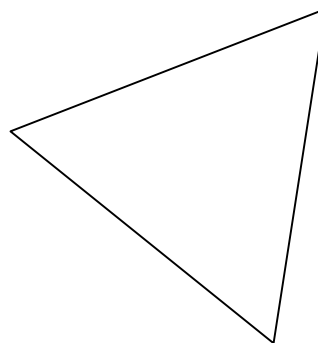
2)



3)



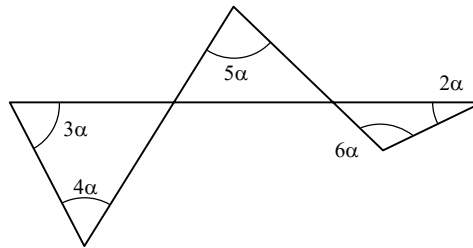
4)



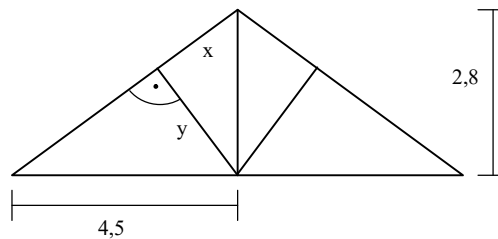
3) Rispondere alle seguenti domande:

- a) Un triangolo può avere due angoli ottusi e uno acuto?
- b) Un triangolo può avere tutti e tre gli angoli acuti?
- c) Un triangolo può avere due angoli acuti e uno retto?
- d) Un triangolo può avere due angoli acuti e uno ottuso?
- e) Un triangolo non può avere più di un angolo ottuso?

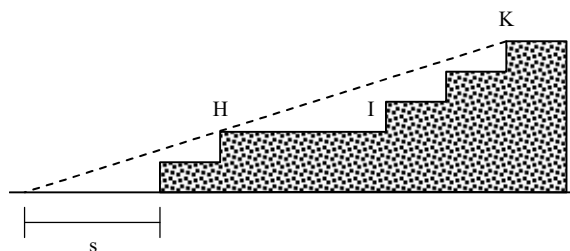
- 4) Disegnare due rette a e b che si intersecano nel punto E . Sulla retta a tracciare un segmento AB in modo che E sia il suo punto medio e , analogamente, sulla retta b tracciare un segmento $CD \approx AB$ in modo che E sia ancora il suo punto medio. Unire A con C e B con D . Di che tipo sono i due triangoli ACE e BDE ? Sono congruenti? Motivare la risposta.
- 5) Nel seguente disegno indicativo determinare il valore di α :



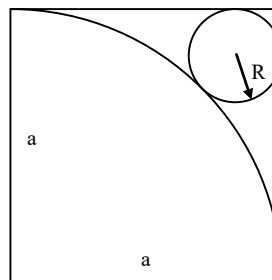
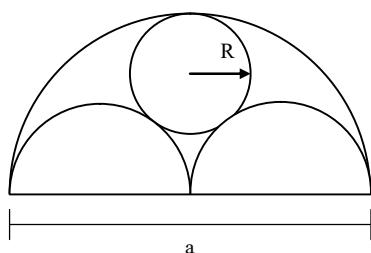
- 6) Le misure indicate (perpendicolari) sono in metri. Calcolare x e y (disegno non in scala).



- 7) L'ingegnere incaricato di progettare una rampa che permetta alle carrozzelle di superare il dislivello evitando gli scalini ha iniziato a tracciare un segmento tratteggiato che rappresenta la rampa. Essa poggia sugli spigoli di due scalini indicati nel disegno (approssimativo) dai punti H e K . Gli scalini hanno un'altezza (detta alzata) di 24 cm e una profondità (detta pedata) di 26 cm. Il pianerottolo HI è lungo 83 cm. Calcolare la lunghezza della rampa e la misura s .

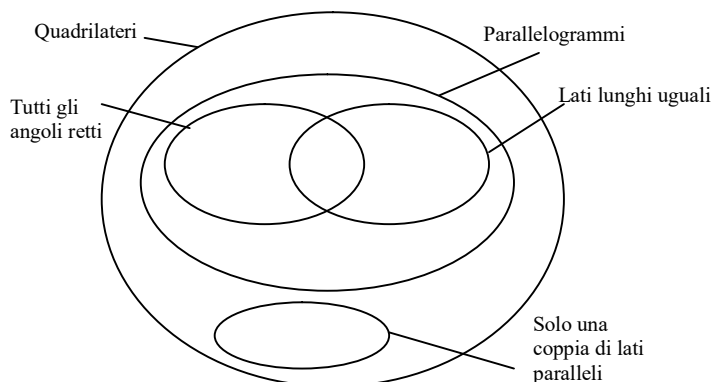


- 8) Determinare la formula che esprime l'altezza di un triangolo equilatero in funzione del lato (suggerimento: denominare il lato con la lettera a e calcolare h in modo letterale, ossia esprimendo h in funzione di a). In seguito determinare la formula che esprime l'area del triangolo equilatero in funzione del lato.
- 9) Determinare le formule per poter calcolare le seguenti lunghezze in funzione delle lettere date.
- a) la diagonale d di un quadrato di lato a ;
 - b) il lato a di un quadrato di diagonale d ;
 - c) l'altezza h di un triangolo equilatero di lato a ;
 - d) il lato a di un triangolo equilatero di altezza h ;
 - e) il lato a di un quadrato inscritto in un cerchio di raggio r ;
 - f) il lato a di un quadrato circoscritto a un cerchio di raggio r ;
 - g) il lato a di un triangolo equilatero inscritto in un cerchio di raggio r ;
 - h) il lato a di un triangolo equilatero circoscritto a un cerchio di raggio r ;
 - i) il lato a di un rombo aventi le diagonali D e d .
- 10) Un'antenna è alta 600 m e si trova su una zona pianeggiante. Da che distanza dalla base dell'antenna è teoricamente possibile vedere la cima (raggio approssimativo della Terra $R = 6370$ km)?
- 11) Sono in piedi su una spiaggia e guardo il mare, verso l'orizzonte. Se i miei occhi sono a 1,70 m dal suolo, fino a che distanza posso arrivare con lo sguardo? Quanto deve essere l'altezza di un faro affinché possa essere visto dal livello del mare, a una distanza di 25 km?
- 12) Calcolare R in funzione di a nei due casi seguenti (lasciare eventuali simboli di radice nel risultato):



4. QUADRILATERI

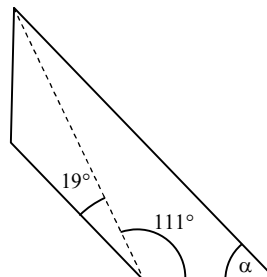
- 1) Conosci bene i quadrilateri? Rispondere alle seguenti domande per un quadrato, per un rettangolo, per un rombo, per un parallelogramma generico (romboide), per un quadrilatero qualunque, per un trapezio isoscele, per un trapezio rettangolo, per un trapezio qualunque.
- a) Come sono le lunghezze dei suoi lati?
 - b) Come sono le ampiezze dei suoi angoli?
 - c) Possiede copie di lati tra loro paralleli? Quante?
 - d) Possiede assi di simmetria? Quali?
 - e) Possiede un centro di simmetria? Quale?
 - f) Come sono le lunghezze delle sue diagonali?
 - g) Le sue diagonali sono perpendicolari?
 - h) Le sue diagonali si intersecano in un punto medio?
- 2) Nel seguente diagramma di Euler-Venn disegnare i quadrilateri della domanda precedente inserendoli al posto giusto. Inoltre inserire altre figure geometriche negli spazi rimanenti sottoindicati:



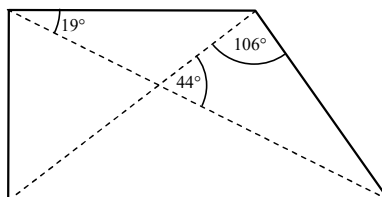
- 3) Se si aumenta di una lunghezza d :
- a) il lato a di un quadrato, di quanto aumenta il suo perimetro? E di quanto aumenta la sua area?
 - b) le due dimensioni a e b di un rettangolo, di quanto aumenta il suo perimetro? E la sua area?
- 4) Inscrivere in un quadrato di lato 6 cm un altro quadrato di 5 cm in modo tale che i vertici di quest'ultimo si trovino sui lati del primo quadrato.
- 5) Dal punto di incontro delle diagonali di un rombo tracciare le perpendicolari ai lati. Congiungere poi i quattro punti di intersezione così ottenuti. Che figura si forma?

- 6) Che figura si ottiene congiungendo i punti medi di un quadrilatero qualsiasi?

- 7) Nella figura è rappresentato un trapezio isoscele. Quanto vale l'ampiezza α ?



- 8) Nella figura è rappresentato un trapezio rettangolo. Determinare e scrivere le ampiezze di tutti gli angoli.



5. IL CERCHIO

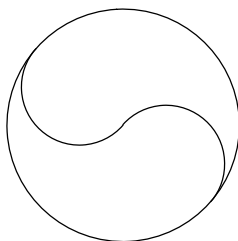
- 1) Scrivere nella seguente tabella le denominazioni degli elementi del cerchio:

Terminologia	Denominazioni	Esempio
	c	
	C	
	O	
	r	
	d	
	AB	
	M	
	$\widehat{AB}$	
	AOB	
	f	
	s	
	t	
	e	
	P	
	A, B	

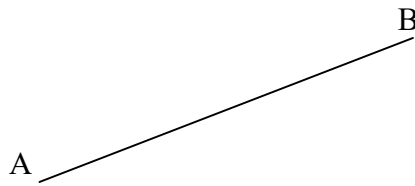
- 2) Rispondere alle seguenti domande:

- Qual è la differenza tra cerchio e circonferenza?
- Ogni cerchio possiede un centro di simmetria?
- Cos'è un segmento circolare?
- Se P e P' sono punti simmetrici di una circonferenza rispetto al centro, quale segmento è PP'?
- Disegnare tre punti qualsiasi (non sovrapposti, non allineati): disegnare la circonferenza passante per questi tre punti.

- 3) Il simbolo indicato è importante per la filosofia cinese. Prova a disegnarlo utilizzando riga e compasso.



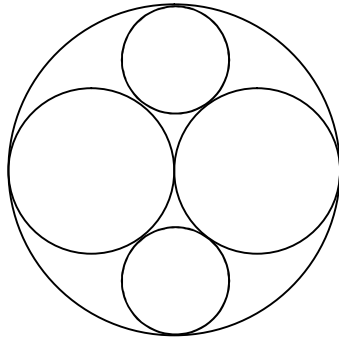
- 4) Determinare graficamente tutti i punti dai quali si vede il segmento AB con un angolo di 50° .



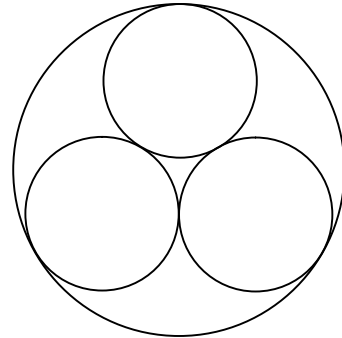
- 5) Una circonferenza ha il diametro $AB = 5$ cm. Un punto C si trova sulla circonferenza in modo tale che $AC = 4$ cm. Quanto vale BC? Perché?
- 6) In un cerchio con $r = 7$ cm è data una corda lunga 10 cm. Calcolare la distanza della corda dal centro del cerchio.
- 7) Disegnare due circonferenze con due diametri diversi. Tracciare la retta tangente ai due cerchi indicando il metodo per individuare graficamente i punti di contatto precisi tra cerchi e retta.
- 8) Calcolare l'angolo di un settore circolare il cui perimetro è equivalente alla circonferenza del cerchio in cui si trova il settore circolare.
- 9) Una ruota ha un diametro di 70 cm. Quanti giri compie su un tragitto di 100 km?
- 10) Vi sono modelli di antiche biciclette nelle quali la ruota anteriore è più grande di quella posteriore. In uno di questi modelli i diametri delle ruote misurano rispettivamente 140 cm e 50 cm.
- a) Se su un certo percorso la ruota anteriore ha compiuto 100 giri, quanti ne ha compiuti quella posteriore?
 - b) Sul battistrada di ciascuna ruota si segna un punto. Quanta strada dovrà essere percorsa, al minimo, per avere i due punti segnati di nuovo entrambi nella posizione iniziale? Quanti giri avrà percorso ogni ruota in quel momento?

11) Una ditta che produce cavi elettrici si trova confrontata con le seguenti situazioni:

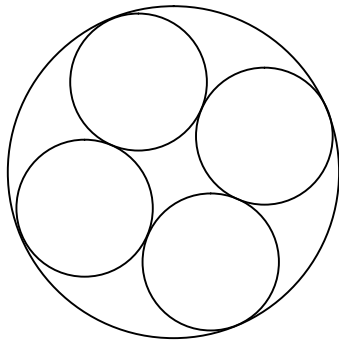
a)



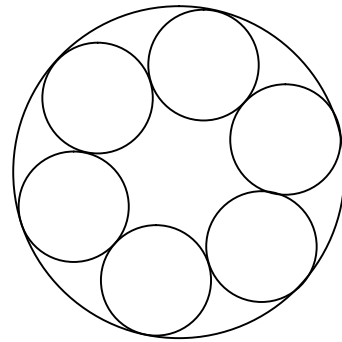
b)



c)



d)



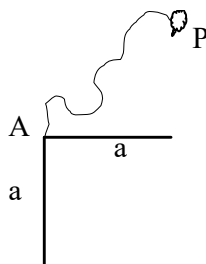
Esprimere il raggio r dei cerchi interni (conduttori) in funzione del raggio R del cerchio esterno (guaina) per i quattro casi indicati.

12) Ipotizziamo di far passare attorno alla Terra una corda che abbia la stessa lunghezza dell'equatore (approssimativamente 40'000 km) e che, quindi, aderisca perfettamente al suolo in ogni punto. Supponiamo, poi, di allungare di un metro questa corda e di sollevarla uniformemente, in modo che ogni suo punto abbia la stessa distanza dal suolo. Quanto misurerà questa distanza?

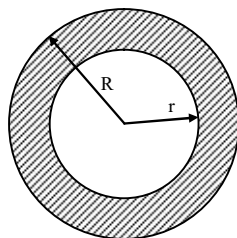
La distanza dal suolo dipende dal raggio della Terra? In altri termini, se la circonferenza viene allungata di un metro, la distanza dal suolo dipende dalla lunghezza della circonferenza?

6. CALCOLO DI SUPERFICI

- 1) Calcolare le seguenti grandezze utilizzando le formule fondamentali:
- a) In un triangolo equilatero, l'altezza è minore di 2 cm rispetto al lato. Calcolare perimetro e superficie del triangolo.
 - b) Un rettangolo ha la base doppia rispetto all'altezza. L'area vale 27 cm^2 . Calcolare le dimensioni del rettangolo.
 - c) Le diagonali di un rombo misurano 6 cm rispettivamente 13 cm. Determina la superficie del rombo.
 - d) Un trapezio rettangolo di area 144 cm^2 ha l'altezza lunga 8 cm. Sapendo che il triplo della lunghezza della base minore è inferiore di 2 cm alla lunghezza del doppio della base maggiore, determinare la lunghezza delle basi.
 - e) Un quadrato, un triangolo equilatero e un cerchio hanno lo stesso perimetro. Quanto vale il rapporto tra le loro aree?
- 2) Dato un quadrato di lato a , calcolare il perimetro e la superficie:
- a) del cerchio circoscritto al quadrato;
 - b) del cerchio inscritto nel quadrato.
- 3) La situazione rappresenta un prato (visto dall'alto) sul quale può pascolare una pecora P legata nel punto A con una corda lunga $\frac{3}{2}$ di a . I due tratti lunghi a rappresentano due muri alti due metri, perpendicolari tra loro. Si domanda di:
- a) disegnare la superficie di pascolo utilizzando soltanto riga e compasso;
 - b) definire quali sono le singole aree che compongono l'intera superficie di pascolo;
 - c) calcolare ciascuna delle singole superfici in modo letterale;
 - d) calcolare la superficie di pascolo totale in modo letterale;
 - e) calcolare la superficie di pascolo totale se $a = 4 \text{ m}$;
 - f) calcolare la superficie di pascolo alla quale la pecora non può accedere (all'interno del grande cerchio di centro A e di raggio $\frac{3}{2} a$), in modo letterale.

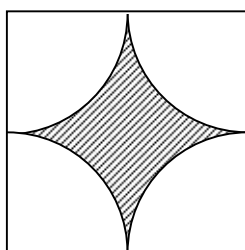


- 4) Determinare la formula della superficie tratteggiata (detta corona circolare) in funzione di R e r .

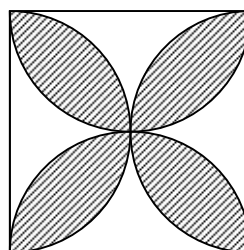


- 5) Determinare la superficie delle seguenti aree tratteggiate in funzione di a (lato dei quadrati o del triangolo), indicando dapprima da quali aree sono composte le seguenti superficie particolari:

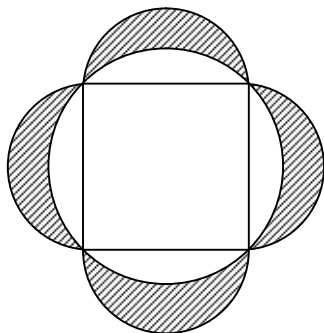
a)



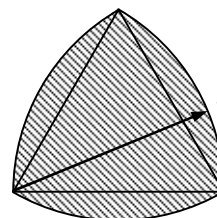
b)



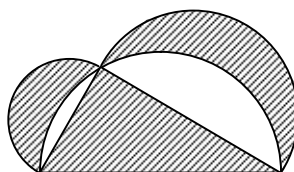
c)



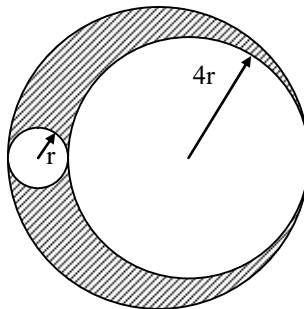
d)



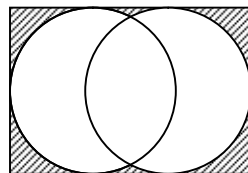
- 6) Data la seguente figura si domanda di dimostrare che l'area del triangolo è uguale alla somma delle aree delle due lunette (i lati del triangolo sono i tre diametri dei rispettivi cerchi).
Osservazione: risolvere in modo più semplice considerando che due angoli del triangolo valgono 60° e 30° .
Poi verificare quanto scritto sopra per un triangolo qualsiasi (denominare i cateti con due lettere e calcolare le aree in funzione di queste due lettere).



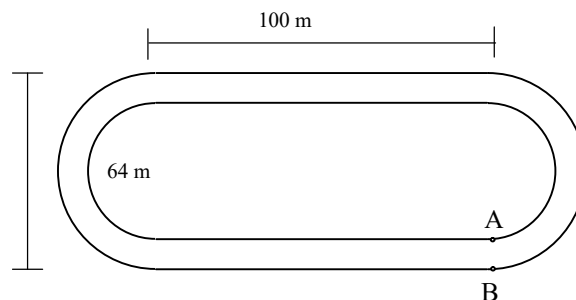
- 7) Calcolare area e perimetro della seguente figura in funzione di r .



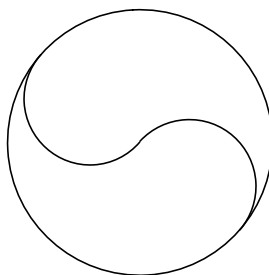
- 8) La figura rappresentata è un rettangolo che contiene esattamente due circonferenze, tali che il centro dell'una è un punto sull'altra. Calcolare area e perimetro della figura tratteggiata in funzione del raggio R .



- 9) In un velodromo un ciclista A percorre una traiettoria costituita da due semicirconferenze e da due rettilinei paralleli (vedi figura). Un ciclista B percorre una traiettoria che si mantiene a 2 m di distanza da quella di A ed è ad essa esterna. In un giro quanti metri B percorre in più di A? Se A percorre un giro alla velocità media di 40 km/h, quale dovrebbe essere la velocità media di B per percorrere un giro nello stesso tempo?

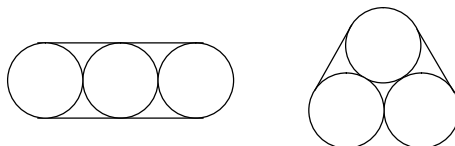


- 10) Calcolare il perimetro di una delle due parti in funzione del raggio R del cerchio.

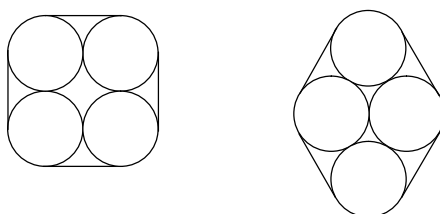


11) Una ditta si occupa di distribuire cibi in scatola. Consideriamo R il raggio della base della scatola cilindrica.

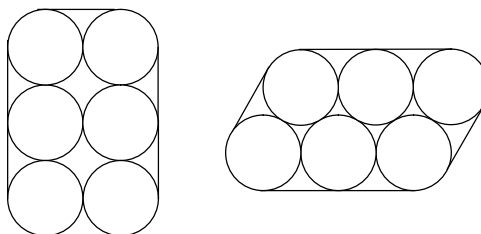
- a) Calcolare la lunghezza (in funzione di R) della striscia di metallo che mantiene unite le scatole di alimenti nei casi seguenti:



- b) Calcolare quale tipo di imballaggio risulta essere il più conveniente tra i due proposti:

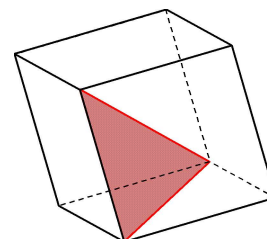
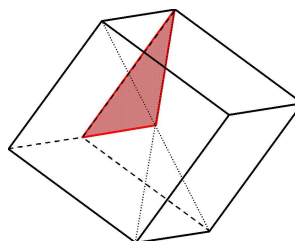
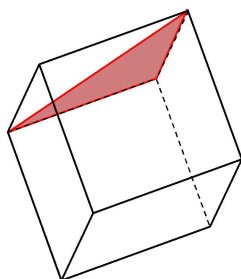
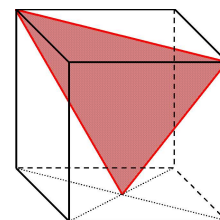
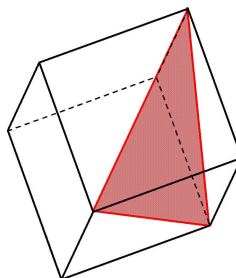
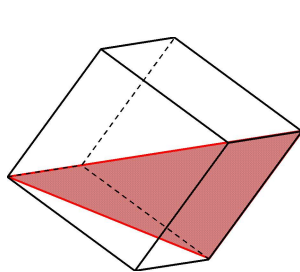


- c) Calcolare quale tipo di imballaggio occupa lo spazio minore:

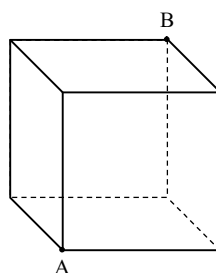


7. VOLUMI

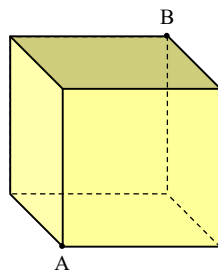
- 1) Consideriamo un cubo.
 - Che tipo di angolo (acuto, retto, ottuso) formano due spigoli incidenti
 - Che tipo di angolo (acuto, retto, ottuso) formano uno spigolo e una diagonale di una faccia?
 - Che tipo di angolo (acuto, retto, ottuso) formano due diagonali di una stessa faccia?
- 2) In ognuno dei seguenti disegni è rappresentato un cubo con evidenziato un triangolo.
 - Di che triangolo si tratta?
 - Se lo spigolo del cubo è lungo a , calcolare la superficie del rispettivo triangolo in funzione di a .



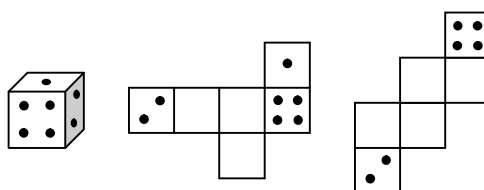
- 3) Si desidera determinare la strada più corta (passando solo sugli spigoli) per giungere dal punto A al punto B. Disegnare almeno un percorso possibile. Quanti di questi percorsi esistono?



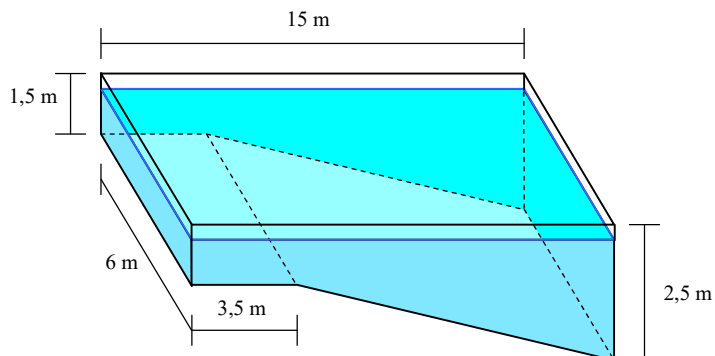
- 4) Si desidera determinare la strada più corta (passando sulle facce) per giungere dal punto A al punto B. Disegnare almeno un percorso possibile (suggerimento: utilizzare lo sviluppo del cubo). Quanti di questi percorsi esistono?



- 5) Sapendo che la somma dei numeri su due facce opposte è sempre 7, scrivere negli sviluppi i numeri mancanti.

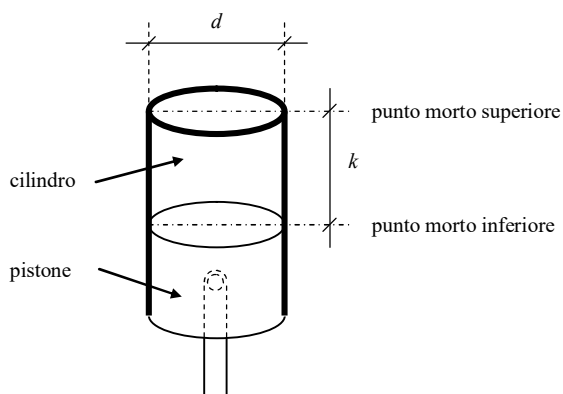


- 6) Calcola il volume di acqua contenuta in una piscina dalle dimensioni indicate, tenendo conto che l'acqua arriva a 20 cm dal bordo.



- 7) Sapendo che la lunghezza della linea equatoriale (meridiano medio) vale circa 40000 km, calcolare approssimativamente:
- il raggio della Terra;
 - il volume della Terra;
 - la superficie totale della crosta terrestre.
- 8) Un mucchio di ghiaia a forma di cono, ha un diametro di base di 6 m e un'altezza di 4 m. Calcolare il volume e la superficie laterale.

- 9) La cilindrata di un motore a scoppio è il volume totale dei cilindri, dove per cilindro si intende lo spazio percorso del pistone da un “punto morto” all’altro (il diametro d del cilindro si chiama “alesaggio” e l’altezza k si chiama “corsa”).
- Trovare una formula che permetta di calcolare la cilindrata V in funzione di k , d e del numero dei cilindri n .
 - Calcolare l’alesaggio di un motore a scoppio che ha i seguenti dati tecnici: cilindrata 1770,400 cm³; corsa: 78 mm; numero cilindri: 4.
 - Calcolare la corsa dei cilindri di un motore a scoppio che ha i seguenti dati tecnici: cilindrata 2387 cm³; alesaggio: 82 mm; numero cilindri: 5.



- 10) La grande piramide in Egitto, ha un’altezza di 147 m e una base quadrata di 230 m di lato. Disegnare una piramide in scala, calcolare il volume e la superficie laterale.
- 11) Il volume di una piramide a base quadrata e con tutti gli spigoli lunghi uguali, vale 250 cm³. Determinare la lunghezza degli spigoli e la superficie totale.
- 12) Da un cubo di spigolo a viene tagliato, in corrispondenza dei punti medi dei tre spigoli, un pezzo corrispondente a una piramide regolare. Calcolare il volume della piramide.

