

A) Calcolo numerico

In questo capitolo verranno trattati i seguenti argomenti:

- Catalogazione dei numeri (numeri naturali, interi, razionali, irrazionali, reali)
- Rappresentazione dei numeri (retta dei numeri, elementi di insiemistica)
- Operazioni con i numeri (priorità delle operazioni e proprietà dei numeri reali)
- I numeri naturali (addizioni, moltiplicazioni, criteri di divisibilità)
- I numeri interi (sottrazioni, operazioni con i numeri negativi)
- I numeri razionali (divisioni, percentuali, frazioni, proporzioni)
- I numeri irrazionali (radici, potenze)
- I numeri reali (notazione scientifica, approssimazioni, arrotondamento, priorità delle operazioni, errori di approssimazione)
- Equazioni numeriche (legge di monotonia)

1 Introduzione

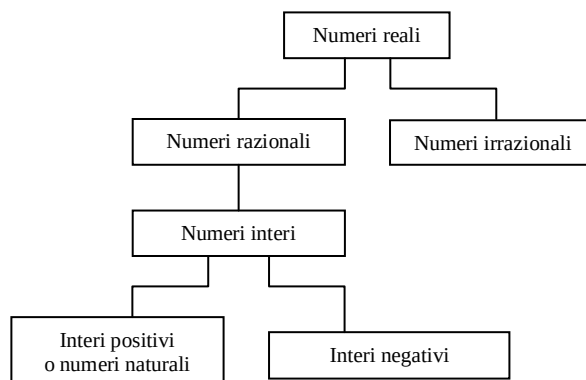
Domanda introduttiva

Che differenza c'è tra un numero razionale e un numero irrazionale?

I numeri usati per misurare quantità esistenti nel mondo reale come lunghezza, area, volume, velocità, carica elettrica, rendimento, intensità di terremoti, profitto, temperatura corporea, prodotto nazionale lordo, ecc. sono chiamati **numeri reali**. E' necessario conoscere le varie categorie di numeri e le loro proprietà.

Dapprima verranno presentate due possibili rappresentazioni dei numeri e, in seguito, per ciascuna categoria, le possibili operazioni e le rispettive proprietà (regole di calcolo).

Iniziamo catalogando i numeri nel modo seguente (le linee che collegano i rettangoli significano che il rettangolo superiore contiene tutti i numeri del rettangolo inferiore):



Ai rispettivi insiemi sono stati associati i seguenti simboli:

Denominazione	Simbolo	Esempi
numeri naturali (numeri interi positivi)	N	1; 2; 3; ...; ∞
numeri interi (numeri relativi: positivi e negativi)	Z	$-\infty$; ...; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...; ∞
numeri razionali (frazioni)	Q	$-\infty$; ...; $-\frac{1}{2}$; ...; 0,333333; ...; 0,5; ...; $1,\overline{6}$; ∞
numeri irrazionali (numeri decimali non periodici)	I	$-\infty$; ...; $-\sqrt{3}$; ...; $\sqrt{5}$; ...; e; ...; π ; ...; ∞
numeri reali (tutti gli insiemi sopracitati)	R	tutti i numeri precedenti

Soluzione

Un numero razionale può sempre essere generato da una frazione.

Esso può essere un numero intero (es.: 2), un numero decimale finito (es.: 0,5) oppure un numero decimale periodico (es.: 0,333...).

Un numero irrazionale **non** può essere generato da una frazione: di conseguenza non può essere un numero intero, nè un numero decimale finito e nemmeno un numero periodico.

Si tratta infatti di un numero decimale non periodico (es.: $\sqrt{2}$, π , ...)

2 Rappresentazioni grafiche

I numeri possono essere rappresentati utilizzando i seguenti metodi:

- la retta dei numeri;
- gli insiemi.

2.1 La retta numerica

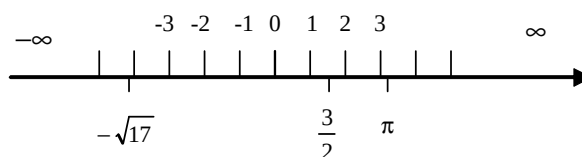
Domanda introduttiva

Com'è possibile rappresentare in modo ordinato tutti i numeri reali?

I numeri presentano un ordine che ci permette di disporli su una retta. Questa rappresentazione è spesso utilizzata anche nella realtà (basti pensare ai termometri, alle righe, ai metri pieghevoli utilizzati dagli artigiani, ecc.)

La retta utilizzata per rappresentare i numeri si chiama **la retta dei numeri (o numerica)**. Essa è rappresentata da una freccia che va dall'infinito negativo (simboleggiato con $-\infty$) all'infinito (simboleggiato con: ∞).

Il senso di riferimento è indicato dalla freccia.



Sulla base di questa rappresentazione possiamo utilizzare i termini presentati nella tabella della pagina seguente:

Terminologia	Spiegazioni	Esempi
maggiore	Significa che, sulla retta numerica, un numero si trova a destra di un altro numero	$3 > 2$
maggiore o uguale	Come sopra ma anche che i due numeri possono essere uguali	$8 \geq 6$ oppure $8 \geq 8$
minore	Significa che, sulla retta numerica, un numero si trova a sinistra di un altro numero	$-3 < 2$
minore o uguale	Come sopra ma anche che i due numeri possono essere uguali	$5 \leq 6$ oppure $6 \leq 6$
diverso	Si tratta di una disuguaglianza	$\pi \neq 2$
precedente	Numero situato subito a sinistra (vale solo per i numeri discreti , ossia numeri che tra di loro presentano spazi vuoti, come i numeri naturali o interi)	4 è il precedente di 5
successivo	Numero situato subito a destra (vale solo per i numeri discreti , ossia numeri che tra di loro presentano spazi vuoti, come i numeri naturali o interi)	-8 è il successivo di -9
consecutivi	Numeri che si susseguono (vale solo per i numeri discreti , ossia numeri che tra di loro presentano spazi vuoti, come i numeri naturali o interi)	2 e 3 oppure -2, -1, 0
distanza unitaria	È la distanza tra due numeri interi consecutivi	distanza tra 4 e 5
intervallo aperto	Insieme di tutti i numeri reali compresi tra due numeri n_1 e n_2 (n_1 e n_2 non compresi nell'intervallo)	$] -3; 2 [$
intervallo chiuso	Insieme di tutti i numeri reali compresi tra due numeri n_1 e n_2 (n_1 e n_2 compresi nell'intervallo)	$[-3; 2]$
coordinata	Sulla retta numerica indica distanza e verso rispetto allo 0	- 3 (3 unità a sinistra) + 2 (2 unità a destra)
valore assoluto (modulo)	Sulla retta numerica è la distanza dallo 0 indipendentemente dal verso	$ -3 = +3 = 3$

Soluzione

Uno strumento matematico che ci permette la rappresentazione dei numeri considerando le loro caratteristiche (ordine, direzione) è la retta numerica. Ad ogni numero viene associato un punto della retta e, reciprocamente, ogni punto della retta corrisponde a un determinato numero.

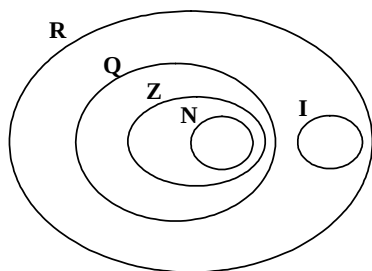
2.2 Gli insiemi

Situazione introduttiva

In una classe ci sono 20 allievi. Tra questi 9 conoscono solo l'italiano, 2 solo il tedesco, 1 solo il francese, 3 parlano italiano e tedesco, 2 tedesco e francese, 1 italiano e francese, 1 italiano, francese e tedesco. Un allievo parla solo spagnolo. Perché la somma degli allievi che conoscono l'italiano o il francese o il tedesco è maggiore di 20? Com'è possibile visualizzare la situazione con una rappresentazione grafica?

Quando è necessario raggruppare diversi elementi numerabili in determinate categorie, si possono utilizzare gli insiemi. Questa rappresentazione, proposta dal matematico svizzero Leonhard Euler (1707-1783) e ripresa da John Venn (1834-1923), è di notevole aiuto per visualizzare le relazioni tra elementi che presentano caratteristiche comuni. Gli insiemi sono quindi uno strumento pratico non solo per rappresentare le categorie di numeri (come vedremo qui di seguito) ma anche per applicazioni nell'ambito delle funzioni o del calcolo combinatorio (per citare solo due esempi).

Ecco la rappresentazione dei numeri utilizzando **gli insiemi**:



numeri naturali: $N = \{1, 2, 3, \dots, \infty\}$
numeri interi: $Z = \{-\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty\}$
numeri razionali: $Q = \{-\infty, \dots, -\frac{2}{3}, \dots, \frac{3}{4}, \dots, \infty\}$
numeri irrazionali: $I = \{-\infty, \dots, -\sqrt{3}, \dots, \pi, \dots, \infty\}$
numeri reali: $R = \{N, Z, Q, I\}$

Ricordiamo in questa occasione alcuni elementi di insiemistica.

Innanzitutto un insieme è un **raggruppamento di oggetti** se esiste un criterio oggettivo per stabilire univocamente se un soggetto fa parte del raggruppamento o no.

Infatti possono essere insiemi i seguenti raggruppamenti:

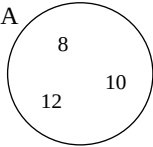
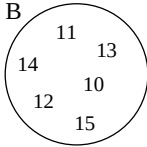
- i pianeti del sistema solare,
- i 10 libri più letti dagli allievi della nostra classe,
- tutti i numeri naturali maggiori a 100.

Non sono insiemi i seguenti raggruppamenti:

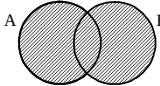
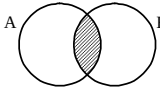
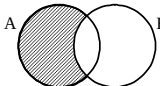
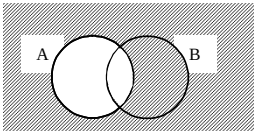
- i numeri molto grandi,
- i libri più letti,
- le case più belle.

Se un oggetto fa parte di un insieme, si dice che esso è un **elemento** che **appartiene** all'insieme e il simbolo di appartenenza è: $\in$. Per esempio $3 \in N$. Se invece un elemento **non appartiene** all'insieme il simbolo utilizzato è: $\notin$. Per esempio $0,5 \notin N$.

Esempio:
se vogliamo descrivere due insiemi (A e B) che contengono:
• A i numeri: 8, 10, 12
• B i numeri: 10, 11, 12, 13, 14, 15
potremo utilizzare i diagrammi di Euler-Venn o le seguenti forme di scrittura:

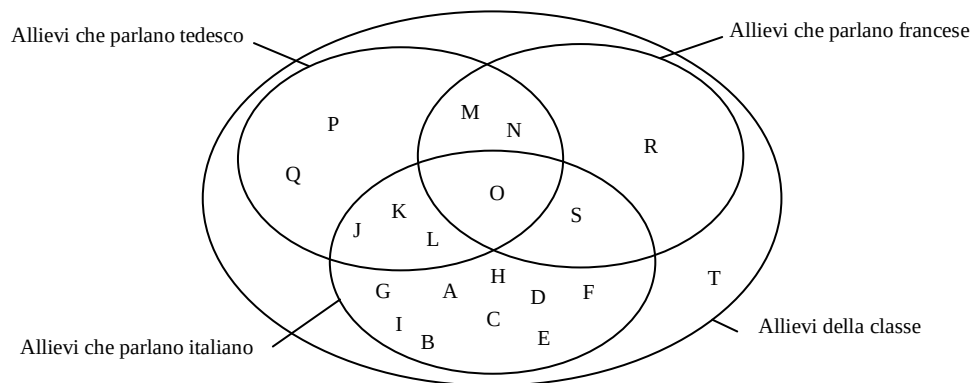
Diagrammi di Euler-Venn	Forme di scrittura
	Forma di scrittura esplicita o per elencazione (gli elementi vengono elencati individualmente): $A = \{8, 10, 12\}$ Le parentesi graffe indicano che A è un insieme.
	Forma di scrittura implicita o per caratteristica (si utilizza una formulazione descrittiva): $B = \{b \in \mathbb{N} \mid 10 \leq b \leq 15\}$ Significa: “b è una variabile che può assumere valori contenuti nell’insieme dei numeri naturali, in particolare b è compresa nell’intervallo tra 10 e 15 (10 e 15 compresi)”.

Facendo riferimento a questi due esempi, possiamo ora definire le operazioni di base con gli insiemi:

Operazioni con gli insiemi			
espressione algebrica	significato	dall’esempio	diagrammi di Euler-Venn
$A \cup B$	unione di A con B	$= \{8, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$	
$A \cap B$	intersezione di A con B	$= \{10, 12\}$	
$A - B$	differenza tra A e B	$= \{8\}$	
$\overline{A}$	negazione di A	tutti i numeri tranne quelli contenuti in A	

Soluzione

Una possibile rappresentazione della situazione descritta è la seguente:



Il numero 27 risulta dalla somma degli allievi che parlano italiano (ossia i 14 allievi inseriti nell'insieme "Allievi che parlano italiano") più gli allievi che parlano francese (ossia i 5 allievi inseriti nell'insieme "Allievi che parlano francese") più gli allievi che parlano tedesco (ossia gli 8 allievi inseriti nell'insieme "Allievi che parlano tedesco").

3 Operazioni con i numeri

Situazioni introduttive

Risolvere le seguenti operazioni numeriche senza utilizzare la calcolatrice:

1) $6 - 2 \cdot 3 + 8 : 2 =$

2) $(3 \cdot 5 + 6) \cdot 0.6795 =$

3) $126 \cdot 5 =$

4) $12345 \cdot \frac{1}{12345} =$

5) Usando esclusivamente 4 volte la cifra 4 e le 4 operazioni fondamentali si possono ottenere tutte le 10 cifre del sistema decimale (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).
Per esempio: $0 = 4 + 4 - 4 - 4$. Calcolare le altre 9 cifre rispettando le condizioni poste.

In generale tutte le operazioni devono essere eseguite considerando le seguenti priorità:

- **priorità 1:** le espressioni racchiuse tra parentesi hanno priorità di calcolo.
- **priorità 2:** elevazione a potenza o radice;
- **priorità 3:** moltiplicazione e divisione;
- **priorità 4:** addizione e sottrazione.

Esempi:

a) $10 + 3 \cdot 2 = 10 + 6 = 16$

b) $3^4 + 2 \cdot 5^2 - \sqrt{9} + 20 : 2^2 = 81 + 2 \cdot 25 - 3 + 20 : 4 = 81 + 50 - 3 + 5 = 133$

c) $3^4 + 2 \cdot (5^2 - \sqrt{9}) + (20 : 2)^2 = 3^4 + 2 \cdot (25 - 3) + 10^2 = 3^4 + 2 \cdot 22 + 10^2 = 81 + 44 + 100 = 225$

Gli esempi sopracitati sono **espressioni numeriche**, ossia sequenze di operazioni con i numeri.

Ricordiamo che **semplificare** espressioni numeriche significa sostituire l'espressione iniziale con una più semplice che abbia lo stesso valore, proprio come dimostrato dagli esempi.

Nella pagina seguente sono presentate le proprietà delle operazioni con i numeri.

Proprietà	Regole	Esempi
commutativa	$a + b = b + a$ oppure $a \cdot b = b \cdot a$ Attenzione: $a - b \neq b - a$ oppure $a : b \neq b : a$	$5 + 3 = 3 + 5$ oppure $6 \cdot 4 = 4 \cdot 6$ Attenzione: $5 - 3 \neq 3 - 5$ oppure $3 : 5 \neq 5 : 3$
associativa	$a + (b + c) = (a + b) + c$ oppure $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ Attenzione: $a - (b + c) \neq (a - b) + c$ oppure $a : (b + c) \neq (a : b) + c$	$2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$ oppure $2 \cdot (3 \cdot 4) = (2 \cdot 3) \cdot 4$ Attenzione: $6 - (3 + 2) \neq (6 - 3) + 2$ oppure $12 : (4 + 2) \neq (12 : 4) + 2$
distributiva	$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ oppure $(a + b) : c = (a : c) + (b : c)$ Attenzione: $a : (b + c) \neq a : b + a : c$	$6 \cdot (2 + 5) = 6 \cdot 2 + 6 \cdot 5$ oppure $(20 + 4) : 2 = 20 : 2 + 4 : 2$ Attenzione: $12 : (4 + 2) \neq 12 : 4 + 12 : 2$
invariantiva	$a - b = (a + c) - (b + c)$ oppure $a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c)$ Attenzione: $a + b \neq (a + c) + (b + c)$ Oppure $a \cdot b \neq (a \cdot c) \cdot (b \cdot c)$	$7 - 5 = (7 + 2) - (5 + 2)$ oppure $2 : 3 = (2 \cdot 4) : (3 \cdot 4)$ Attenzione: $2 + 3 \neq (2 + 4) + (3 + 4)$ oppure $2 \cdot 3 \neq (2 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 4)$
elemento neutro	$a + 0 = a$ oppure $a \cdot 1 = a$	$5 + 0 = 5$ oppure $5 \cdot 1 = 5$
opposto	Se $a + (-a) = 0$ allora $-a$ è l'opposto di a	-5 è l'opposto di 5
inverso (o reciproco)	Se $a \cdot 1/a = 1$ allora $1/a$ è l'inverso di a (a diverso da 0)	4 è l'inverso di $\frac{1}{4}$
annullamento del prodotto	$a \cdot b \cdot c \cdot 0 = 0$	$3 \cdot 345 \cdot 3456789 \cdot 0 = 0$

Soluzioni

- 1) $6 - 2 \cdot 3 + 8 : 2 = 6 - 6 + 4 = 4$
- 2) $(3 \cdot 5 + 6) \cdot 0 \cdot 6795 = 0$
- 3) $126 \cdot 5 = (100 + 20 + 6) \cdot 5 = 500 + 100 + 30 = 630$
- 4) $12345 \cdot \frac{1}{12345} = 1$
- 5) $1 = \frac{44}{44}; \quad 2 = \frac{4}{4} + \frac{4}{4}; \quad 3 = \frac{4+4+4}{4}; \quad 4 = [(4-4) \cdot 4] + 4 \quad 5 = \frac{4 \cdot 4 + 4}{4}; \quad 6 = (4+4) : 4 + 4;$
 $7 = 44 : 4 - 4; \quad 8 = 4 + 4 + 4 - 4; \quad 9 = 4 : 4 + 4 + 4$

4 Numeri naturali

Situazione introduttiva

Con 432 cioccolatini, 600 caramelle e 180 biscotti si desidera confezionare dei pacchetti aventi tutti lo stesso numero di dolci. Qual è il numero massimo di pacchetti uguali che si possono preparare utilizzando tutti i dolci?

Nell'insieme dei numeri naturali è sempre possibile effettuare le seguenti operazioni:

Operazione	Esempio	Definizioni
addizione	$5 + 3 = 8$	5 e 3 sono gli addendi ; 8 è la somma
moltiplicazione	$6 \cdot 3 = 18$	6 e 3 sono i fattori ; 18 è il prodotto
elevazione a potenza (con esponente naturale)	$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$	2 è la base ; 3 è l' esponente in generale $a^0 = 1$ (con: $a \neq 0$, $a \in \mathbf{R}$)

E' importante conoscere i seguenti termini:

Terminologia	Significato	Esempi
numero primo	Un numero che ha esattamente 2 divisori	5, 11, 23
scomposizione in fattori primi (fattorizzazione)	Se un numero non è primo, allora si può scomporre in fattori primi	$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ (2, 3, 5, 7 sono i fattori primi di 210)
divisore	Se $k = m \cdot n$ (con $k, m, n \in \mathbf{N}$) allora: m e n si dicono divisori di k	i divisori di 15 sono: 15, 5, 3, 1. Si scrive: $D_{15} = \{15, 5, 3, 1\}$
multiplo	Se $k = m \cdot n$ (con $k, m, n \in \mathbf{N}$) allora: k si dice multiplo di m e n	i multipli di 3 sono 3, 6, 9, 12, 15, Si scrive: $M_3 = \{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$
minimo comune multiplo (m.c.m.)	Corrisponde al più piccolo numero divisibile per tutti i numeri considerati (corrisponde al minimo comun denominatore nel caso di una somma di frazioni)	il m.c.m di 3, 4 e 6 è 12. Si scrive: m.c.m. (3; 4, 6) = 12 $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2}{12} = \frac{9}{12}$
Massimo Comun Divisore (M.C.D.)	E' il divisore più grande di tutti i numeri considerati (corrisponde al numero che permette la semplificazione ai minimi termini delle frazioni numeriche)	il M.C.D di 9 e 12 è 3. Si scrive : M.C.D (9; 12) = 3 Quindi: $\frac{9}{12} = \frac{9:3}{12:3} = \frac{3}{4}$

Ricordiamo alcuni **criteri di divisibilità** che potrebbero essere utili per la scomposizione in fattori primi:

Un numero è divisibile per	quando	Esempio di numero divisibile	Esempio di numero non divisibile
2	l'ultima cifra è pari	5679254	5679253
3	la somma delle cifre è divisibile per 3	15465	15466
4	le ultime due cifre sono divisibili per 4	97540	97543
5	l'ultima cifra è 0 o 5	234987560	234987561
6	la somma delle cifre è divisibile per 3 e l'ultima cifra è pari	48198	38199
7	il numero ottenuto sommando al numero delle sue decine il quintuplo delle unità è divisibile per 7 (applicare successivamente)	1519: $151 + 5 \cdot 9 = 196$ poi $19 + 5 \cdot 6 = 49$	1518: $151 + 5 \cdot 8 = 191$ poi $19 + 1 \cdot 5 = 24$
9	la somma delle cifre è divisibile per 9	97254	97255
11	la differenza tra la somma delle cifre in posizione pari e la somma delle cifre in posizione dispari (o viceversa) è uguale a 11 o a un multiplo di 11	6150914 $6 + 5 + 9 + 4 = 24$ $1 + 0 + 1 = 2$ $24 - 2 = 22$	6150915 $6 + 5 + 9 + 5 = 25$ $1 + 0 + 1 = 2$ $25 - 2 = 23$
25	le ultime due cifre sono divisibili per 25	548650	548651

In generale: se un numero m è divisibile per a e per b , allora m è divisibile per $(a \cdot b)$.

Per esempio: 126 è divisibile per 2 e per 9, quindi 126 è anche divisibile per $(2 \cdot 9)$, ossia per 18.

Soluzione

Si tratta di determinare il M.C.D. dei numeri 432, 600 e 180, corrispondente al numero massimo di pacchetti, senza resti.

$$432 = 2^4 \cdot 3^3; \quad 600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2; \quad 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \Rightarrow \text{M.C.D} = 2^2 \cdot 3 = 12$$

In ciascuno dei 12 sacchetti avremo quindi:

432 cioccolatini : 12 = 36 cioccolatini;

600 caramelle : 12 = 50 caramelle;

180 biscotti : 12 = 15 biscotti.

5 Numeri interi

Situazioni introduttive

- 1) Un contabile deve calcolare il risultato di fine semestre della ditta in cui svolge la sua attività, considerando l'andamento rappresentato dalla seguente tabella (valori in migliaia di Fr):

mesi	gen	feb	mar	apr	mag	giu
guadagni	500	200		600		
perdite			300		800	300

Calcolare il risultato finanziario a fine semestre.

- 2) Risolvere le seguenti operazioni:

a) $2 - (6 - 3) = ?$ b) $2^{-2} = ?$ c) $(-2) \cdot (-4) = ?$

- 3) In ambito geografico, cosa significa: 2000 m.s.m. oppure -1000 m.s.m. ?

I numeri interi comprendono i numeri naturali (interi positivi) e i numeri negativi. Essi vengono utilizzati in diversi ambiti: temperature negative, situazione finanziaria (saldo passivo o attivo), posizione di un ascensore in un palazzo con piani interrati, ecc. Infatti il segno positivo o negativo davanti alla cifra permette di indicare una caratteristica supplementare necessaria per alcune grandezze fisiche che altrimenti non potrebbero essere definite in modo univoco con i numeri positivi (per esempio: l'accelerazione).

Nell'ambito dei numeri interi, in aggiunta alle operazioni viste nel paragrafo precedente, è sempre possibile effettuare le seguenti operazioni:

Operazione	Esempio	Definizioni
sottrazione	$6 - 8 = -2$	6 è il minuendo ; 8 è il sottraendo ; -2 è la differenza
elevazione a potenza (con esponente intero negativo)	$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$	in generale: $a^{-1} = \frac{1}{a}$ (con: $a \neq 0$)

Attenzione:

- $-2^2 = -4$ Infatti: $-2^2 = (-1) \cdot 2^2 = (-1) \cdot 4 = -4$
- $(-2)^2 = 4$ Infatti: $(-2)^2 = [(-1) \cdot 2]^2 = (-1)^2 \cdot 2^2 = (1) \cdot 4 = 4$
- $-2^3 = -8$ Infatti: $-2^3 = (-1) \cdot 2^3 = (-1) \cdot 8 = -8$
- $(-2)^3 = -8$ Infatti: $(-2)^3 = [(-1) \cdot 2]^3 = (-1)^3 \cdot 2^3 = (-1) \cdot 8 = -8$

In realtà, nell'ambito dei numeri interi si parla solo di **somma algebrica** poiché la sottrazione $a - b$ viene considerata la somma $a + (-b)$. Per esempio: $5 - 2 = 5 + (-2) = 3$.

Inoltre, normalmente, i numeri positivi vengono scritti senza segno: $+5 = 5$.

I numeri negativi semplificano la seguente scrittura: $(-1) \cdot 5 = -5$.

Legge della negazione: $10 - (3 + 4 - 5) = 10 - 3 - 4 + 5 = 8$.

Ricordiamo qui di seguito le regole delle operazioni con i numeri interi:

Addizione:

$(+ a) + (+ b) = a + b$	$(+ 4) + (+3) = 4 + 3 = 7$
$(+ a) - (+ b) = a - b$	$(+ 4) - (+3) = 4 - 3 = 1$
$(+ a) + (- b) = a - b$	$(+ 4) + (-3) = 4 - 3 = 1$
$(+ a) - (- b) = a + b$	$(+ 4) - (-3) = 4 + 3 = 7$

Moltiplicazione:

$(+ a) \cdot (+ b) = a \cdot b$	$(+ 4) \cdot (+3) = 12$
$(+ a) \cdot (- b) = - a \cdot b$	$(+ 4) \cdot (-3) = -12$
$(- a) \cdot (+ b) = - a \cdot b$	$(- 4) \cdot (+3) = -12$
$(- a) \cdot (- b) = a \cdot b$	$(- 4) \cdot (-3) = 12$

Divisione:

$\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}$	$\frac{+3}{+4} = +\frac{3}{4}$
$\frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$	$\frac{+3}{-4} = -\frac{3}{4}$
$\frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$	$\frac{-3}{+4} = -\frac{3}{4}$
$\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}$	$\frac{-3}{-4} = +\frac{3}{4}$

Elevazione a potenza (a, b sono numeri naturali):

$(- a)^b = a^b$ se b è pari,	$(- 4)^2 = [(- 1) \cdot 4]^2 = (-1)^2 \cdot 4^2 = 16$
$(- a)^b = - (a^b)$ se b è dispari	$(- 4)^3 = [(- 1) \cdot 4]^3 = (-1)^3 \cdot 4^3 = - 64$
$- a^b = (- 1) \cdot a^b$	$- 4^2 = (-1) \cdot 4^2 = (-1) \cdot 16 = - 16$

Per curiosità vengono proposte qui di seguito alcune dimostrazioni:

Come verificare che: $(+3) \cdot (-5) = -15$?	Come verificare che: $(-8) \cdot (-2) = 16$?
Poiché $(+3) \cdot (0) = 0$, allora: $(+3) \cdot [(-5) + (+5)] = 0$, ossia: $[(+3) \cdot (-5)] + [(+3) \cdot (+5)] = 0$, che diventa: $(+3) \cdot (-5) + 15 = 0$. Quindi: $(+3) \cdot (-5)$ deve essere uguale a -15.	Sapendo che: $-8 = (-8) \cdot (+1)$, e che: $(+1) = (-2) + (+3)$, abbiamo: $-8 = (-8) \cdot (+1) = (-8) \cdot [(-2) + (+3)]$. Se distribuiamo: $-8 = [(-8) \cdot (-2)] + [(-8) \cdot (+3)]$ che diventa: $-8 = (-8) \cdot (-2) + (-24)$. Sommando 24 ai due membri dell'uguaglianza si ottiene: $-8 + 24 = (-8) \cdot (-2)$ ossia: $(-8) \cdot (-2) = 16$.

Come verificare che: $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$?
Consideriamo: $2^2 : 2^5 = \frac{2^2}{2^5} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^3}$ Inoltre sappiamo che: $2^2 : 2^5 = 2^{2-5} = 2^{-3}$ Quindi: $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

Soluzioni

- 1) Il risultato finanziario corrisponde alla somma algebrica di guadagni e perdite:
Risultato finanziario = $500 + 200 + (-300) + 600 + (-800) + (-300) = -100$.
Il segno “-” indica che a fine semestre il risultato finanziario presenta una perdita di 100'000.- Fr.
- 2) Soluzioni:
 - a) $2 - (6 - 3) = 2 - 6 + 3 = -1$
 - b) $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$
 - c) $(-2) \cdot (-4) = 8$
- 3) 2000 m.s.m. significa 2000 metri sopra il livello del mare (+ 2000 m), mentre - 1000 m.s.m. significa 1000 metri sotto il livello del mare (- 1000 m).

6 Numeri razionali

Situazioni introduttive

- 1) $\frac{4}{8} = ?$ 2) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = ?$ 3) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = ?$ 4) $\frac{\frac{1}{2}}{4} : \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{\frac{1}{3}} = ?$ 5) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = ?$
- 6) Quando, dall'estero si rientra in Svizzera, si possono importare due litri di vino. Se mi presento alla dogana con tre bottiglie di $\frac{3}{8}$ di litro (mezze bottiglie) e una bottiglia di $\frac{3}{4}$, devo annunciare la merce, per pagare eventuali tasse, oppure non c'è nulla da dichiarare?
- 7) I $\frac{3}{5}$ degli allievi di una classe sono ticinesi. A quale percentuale corrisponde?
- 8) Se ottengo uno sconto del 15% su un determinato prodotto, quale frazione pagherò rispetto al prezzo di listino?
- 9) In una nazione, annualmente, vengono riscontrati, sulle strade, 200 morti su un totale di 4 milioni di utenti mentre sulle montagne vengono censiti 12 morti su un totale di 960000 escursionisti. E' più pericoloso andare in montagna o immettersi nel traffico stradale?

Nell'ambito dei numeri razionali, in aggiunta alle operazioni viste nel paragrafo precedente, è sempre possibile effettuare la seguente operazione:

Operazione	Esempio	Definizioni
divisione (rapporto)	$2 : 10 = 0,2$	2 è il dividendo ; 10 è il divisore ; 0,2 è il quoziente

Il quoziente può essere espresso sottoforma di **numero razionale**, ossia una **frazione**: $0,2 = 2 : 10 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

Un numero razionale può dare un ...		
... risultato intero. Es.: $\frac{6}{3} = 2$	... risultato decimale ...	
	... finito. Es.: $\frac{5}{2} = 2,5$	... periodico. Es.: $\frac{1}{3} = 0,333... = 0,\overline{3}$

Viceversa ogni **numero intero o decimale (periodico o finito)** corrisponde a un **numero razionale**:

$$5 = \frac{10}{2}; \quad 0,7 = \frac{7}{10}; \quad 1,075 = \frac{1075}{1000} = \frac{43}{40}.$$

Per determinare una frazione che esprime un numero decimale periodico si procede nel modo seguente:

Esempio a) : $0,1\overline{73} = ?$

$$x = 0,1\overline{73}$$

$$1000 \cdot x = 173,1\overline{73}$$

$$1000x - x = 173,1\overline{73} - 0,1\overline{73}$$

$$999 \cdot x = 173$$

$$x = \frac{173}{999}$$

Esempio b) : $1,2\overline{345} = ?$

$$x = 1,2\overline{345}$$

$$10 \cdot x = 12,3\overline{45}$$

$$10'000 \cdot x = 12345,3\overline{45}$$

$$10'000x - 10x = 12345,3\overline{45} - 12,3\overline{45}$$

$$9990x = 12'333$$

$$x = \frac{12333}{9990} = \frac{4111}{3330}$$

Esempio c) : $0,9\overline{9} = ?$

$$x = 0,9\overline{9}$$

$$10 \cdot x = 9,9\overline{9}$$

$$10x - x = 9,9\overline{9} - 0,9\overline{9}$$

$$9x = 9$$

$$x = 1$$

Impiego corrente dei numeri razionali:

Denominazione	Esempio	Significato
Forma percentuale	$\frac{2}{5} = 0,4 = \frac{40}{100} = 40\%$ Inversamente abbiamo: $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} = 0,75$	Si tratta di una frazione con il denominatore uguale a 100, scritta in un'altra forma. Le percentuali sono utilizzate per esprimere parti di una determinata quantità (es: sconto del 10% di 50.- Fr). Inoltre le percentuali permettono un confronto diretto non sempre esplicito con le frazioni: se, per esempio, in una classe ci sono $\frac{3}{4}$ di allieve bionde e in un'altra classe ce ne sono $\frac{2}{5}$, il confronto immediato non è possibile. Se invece $\frac{3}{4}$ viene riscritto in percentuale, ossia $\frac{3}{4} = 0,75 = 75\%$ e $\frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$ allora è facile affermare dove si trova il maggior numero di allieve bionde.
Proporzione	$10 : 2 = 30 : 6$ Oppure: $\frac{10}{2} = \frac{30}{6}$	Una proporzione è un'uguaglianza tra due frazioni equivalenti. Esempio: se un pittore pittura 10 m² in due ore, per pittura 30 m² impiegherà 6 ore. La proporzione può essere scritta così: $10 : 2 = 30 : 6$ oppure $\frac{10}{2} = \frac{30}{6}$ (= 5 m² in un'ora) Il rapporto è lo stesso e indica la superficie pitturata in un'ora. In questo caso si parla di grandezze direttamente proporzionali (se, per esempio, il tempo di lavoro raddoppia, anche la superficie pitturata raddoppia). Se invece ad un aumento di una grandezza corrisponde una diminuzione di una seconda grandezza, allora si dice che esse sono inversamente proporzionali (per esempio se considero il tempo che si impiega per percorrere una galleria e la velocità di spostamento; in questo caso se la velocità raddoppia il tempo per percorrere la galleria dimezza).

Calcolo con le frazioni:

Proprietà e operazioni	Regole	Esempi
semplificazione (riduzione ai minimi termini)	$\frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{a}{b}$	$\frac{4}{6} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{3}$ (frazioni equivalenti)
amplificazione	$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}$	$\frac{2}{3} = \frac{12}{18}$ (frazioni equivalenti)
somma	$\frac{a}{n} + \frac{c}{n} = \frac{a+c}{n}$ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2+4}{3} = \frac{6}{3} = 2$ $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 4 \cdot 3}{3 \cdot 5}$ e non: $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2+4}{3+5}$
moltiplicazione	$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$ $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{2 \cdot 5}{3} = \frac{10}{3}$ $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}$
divisione	$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$ $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$	$\frac{2}{3} : 3 = \frac{2}{3 \cdot 3} = \frac{2}{9}$ e non: $\frac{2}{3} : 3 = 2$ $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4}$
frazione negativa	$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$	$-\frac{1}{2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$
elevazione a potenza	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$
potenza negativa	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$ oppure: $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3}$

Attenzione alle scritture:

$$\frac{1}{2} = 1 : \frac{2}{3} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Lo zero e la divisione

$6 : 0$ è impossibile	non esiste nessun numero che moltiplicato per 0 dia 6
$0 : 0$ è indeterminato	poiché qualsiasi numero moltiplicato per 0 dà 0
$0 : 6$ è uguale a 0	poiché 0 è l' unico numero che moltiplicato per 6 dà 0

Soluzioni

$$1) \quad \frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$2) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3 + 1 \cdot 2}{6} = \frac{5}{6}$$

$$3) \quad \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1} = \frac{3}{2}$$

$$4) \quad \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}} : \frac{2}{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{2} : 4 \right) \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(2 : \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{3}{4} \cdot (2 \cdot 3) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 6}{2 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$$

$$5) \quad \left(\frac{2}{3} \right)^{-2} = \left(\frac{3}{2} \right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$$

$$6) \quad 3 \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{4} = \frac{9}{8} + \frac{3}{4} = \frac{9+3 \cdot 2}{8} = \frac{15}{8} \leq 2 \text{ litri : quindi non è necessario dichiarare la merce.}$$

$$7) \quad \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{60}{100} = 60\%$$

$$8) \quad 100\% - 15\% = 85\% = \frac{85}{100} = \frac{17}{20} \text{ del prezzo di listino.}$$

$$9) \quad \frac{200}{4000000} = \frac{1}{20000} = 0,005\% : \text{percentuale di decessi sulle strade.}$$

$$\frac{12}{960000} = \frac{1}{80000} = 0,00125\% : \text{percentuale di decessi in montagna.}$$

Di conseguenza, sulla base di questi dati, risultano esserci, in proporzione, più decessi sulle strade.

7 Numeri irrazionali

Situazioni introduttive

- 1) Quali caratteristiche differenziano i numeri irrazionali dai numeri razionali?
- 2) Risolvere le seguenti operazioni con i numeri irrazionali:
 - a) $\sqrt{4} = ?$
 - b) $\sqrt[3]{2^6} = ?$
 - c) $3^{-\frac{1}{2}} = ?$
 - d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} = ?$
 - e) $\frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[3]{2}} = ?$
 - f) $\sqrt{3^2 + 4^2} = ?$

La caratteristica principale dei numeri irrazionali è che hanno **infinite cifre dopo la virgola, non periodiche** (ossia non ci sono cifre o gruppi di cifre che si ripetono). Essi non si possono riscrivere sotto forma di frazione (per es.: $\sqrt{2}$). In particolare studieremo i numeri irrazionali che sono il risultato di **radicali** (per esempio: lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1).

Ricordiamo che i numeri irrazionali che non sono il risultato di una radice si chiamano **trascendenti**, per esempio: π .

L'estrazione di una radice può dare un ...			
... risultato intero.	... risultato decimale ...		
Es.: $\sqrt{4} = 2$	... finito. Es.: $\sqrt{0,04} = 0,2$	... periodico. Es.: $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} = 0,\bar{3}$	... infinito e non periodico ossia un numero irrazionale. Es.: $\sqrt{2} = 1,414...$

Nell'ambito dei numeri irrazionali in aggiunta alle operazioni viste nel paragrafo precedente, è sempre possibile effettuare le seguenti operazioni:

Operazione	Esempio	Definizioni
estrazione di radice:	$\sqrt[3]{2^6} = 4$	2 è il radicando ; 3 è l' indice della radice; 6 è l' esponente del radicando ; 4 è la radice ; (la radice senza indice significa radice quadrata)
elevazione a potenza: (con esponente razionale)	$2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$	in generale: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ (con: $a > 0$, $a \in \mathbf{R}$) <u>Dimostrazione:</u> data l'equazione: $\sqrt[n]{a} = a^x$, determiniamo x: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots = a^x \cdot a^x \cdot a^x \cdot \dots$ $a^1 = a^{x \cdot n}$ $1 = x \cdot n \Rightarrow x = \frac{1}{n}$

In questo capitolo vengono proposte le regole sulle potenze poiché **ogni espressione radicale può essere espressa con potenze a esponente razionale e viceversa**. Infatti, se $a > 0$:

$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$	Per esempio: $\sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$
---	--

Di conseguenza le espressioni radicali si possono trasformare in espressioni con potenze a esponente razionale e risolte con le regole seguenti:

Regole	Dimostrazioni	Esempi
1) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \Rightarrow a = a^{2m} \Rightarrow 1 = 2m \Rightarrow m = \frac{1}{2}$	$\sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$
2) $\sqrt[n]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}^p$	$\sqrt[4]{a^2} = a^{\frac{2}{4}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$	$\sqrt[4]{3^8} = 3^{\frac{8}{4}} = 3^2 = 9$
3) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^3 \cdot a^2 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$	$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = 5^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{5^5}$
4) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{a^3}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a$, ossia: $\frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a$	$\frac{3^4}{3^2} = 3^{4-2} = 3^2$
5) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(a^3)^2 = (a \cdot a \cdot a)^2 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^6$	$(2^4)^6 = 2^{4 \cdot 6} = 2^{24}$
6) $(ab)^m = a^m \cdot b^m$	$(ab)^3 = (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = a^3 \cdot b^3$	$\sqrt{20} = \sqrt{5 \cdot 4} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{4} = 2 \cdot \sqrt{5}$
7) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$	$\sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$
8) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$	$\frac{a^2}{a^3} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a} = a^{2-3} = a^{-1}$	$8^{-1} = \frac{1}{8}$

Ricordiamo inoltre che:

$b \cdot a^m \pm c \cdot a^m = (b \pm c) \cdot a^m$	Infatti: $2\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{5} - 4\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5} \cdot (2 + 3 - 4) = \sqrt[3]{5} \cdot 1 = \sqrt[3]{5}$
---	---

Attenzione:	
$(a \pm b)^m \neq a^m \pm b^m$, per esempio: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$	infatti: $\sqrt{4+9} = \sqrt{13} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9} = 5$
$(a^m \pm b^m)^{\frac{1}{m}} \neq a \pm b$, per esempio: $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$	infatti: $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \neq 3 + 4 = 7$

Ecco alcuni esempi:

$$a) \quad \sqrt[10]{32} = \sqrt[10]{2^5} = 2^{\frac{5}{10}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$b) \quad \sqrt{\sqrt{a}} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$$

$$c) \quad \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}$$

$$d) \quad \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt[6]{b} = b^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}} = b^{\frac{2+3+1}{6}} = b^{\frac{6}{6}} = b$$

$$e) \quad \frac{\sqrt[6]{x^7 \cdot \sqrt{x}}}{\sqrt[10]{\sqrt{x^5}}} \cdot \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^{-1} + x^{-2}}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \frac{(x^7 \cdot x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{6}}}{(x^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{10}}} \cdot \frac{1}{x \cdot (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} \cdot (1 + \frac{1}{x})^{\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{15}{12}}}{x^{\frac{5}{20}}} \cdot \frac{1}{x \cdot (\frac{x+1}{x^2})^{\frac{1}{2}}} \cdot (\frac{x+1}{x})^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{1}{x \cdot (\frac{x+1}{x^2})^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{\frac{5}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}} \cdot 1 \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{5}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

Soluzioni

1) Vedi teoria

$$2) \quad a) \quad \sqrt{4} = 2$$

$$b) \quad \sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$$

$$c) \quad 3^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$d) \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = 2^{\frac{2+1}{4}} = 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$$

$$e) \quad \frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{2^2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2^{\frac{2}{6}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}} = 2^0 = 1$$

$$f) \quad \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{e non: } \sqrt{3^2 + 4^2} \neq 3 + 4 = 7$$

8 Numeri reali

Situazioni introduttive

- 1) Riscrivere il numero 0,000 000 05 utilizzando la notazione scientifica.
- 2) Arrotondare al mezzo punto la nota 4,28.
- 3) Se l'indicatore di velocità indica un valore di 40 km/h invece di 42,4 km/h, di quanto sbaglia in assoluto e in percentuale?

- **Notazione scientifica**

I numeri molto grandi, o molto piccoli, possono essere scritti nella seguente forma, detta **notazione scientifica**:

$5'000'000'000 = 5 \cdot 10^9$, ossia 5 seguito da 9 zeri;

$0,000\ 000\ 000\ 3 = 3 \cdot 10^{-10}$, ossia la cifra 3 si trova in decima posizione dopo la virgola.

Questi numeri possono essere rappresentati anche con la calcolatrice. Per esempio: per inserire un milione scritto in notazione scientifica, si dovranno premere, in sequenza, i seguenti tasti della calcolatrice:



Il tasto EXP (oppure EE, a dipendenza del modello di calcolatrice) corrisponde a: “**per 10 elevato a**”; il significato della sequenza di tasti sopraindicata è: 1 “*per 10 elevato a*” 6, ossia un milione.

Per esempio: 0,0025 può essere inserito con la sequenza: 2,5 EXP -3 che corrisponde a: “ $2,5 \cdot 10^{-3}$ ”.

- **Priorità delle operazioni**

Ricordiamo che la calcolatrice effettua le operazioni con le stesse priorità della matematica (indicate nel capitolo delle operazioni numeriche).

- **Approssimazioni**

Quando si risolvono equazioni, espressioni, problemi, calcolo di superfici geometriche, ecc. **è meglio lasciare nei risultati ottenuti le radici, le frazioni, il π , ecc. ed evitare di trasformare il risultato in numero decimale**. Se invece, per ovvi motivi si deve fornire un risultato con la virgola, allora si deve conoscere la tecnica dell'**arrotondamento**. Consideriamo il valore dell'ultima cifra da arrotondare:

- o se tale valore è **maggiore o uguale a 5**, **aumentare di 1 l'ultima cifra** considerata
- o se è **minore di 5** lasciare **invariata l'ultima cifra** considerata.

Per esempio: 2,752 approssimato alla seconda cifra decimale diventa 2,75; approssimato alla prima cifra decimale diventa 2,8.

Attenzione alla scrittura: $\sqrt{7} \cong 2,6$ e non $\sqrt{7} = 2,6$

- Errori di misura**

Quando si misura una grandezza fisica, il valore numerico ottenuto è un'approssimazione. Ciò significa che il valore misurato presenta un errore che può essere espresso nei modi seguenti:

Errore assoluto:	$e_a = (\text{valore misurato}) - (\text{valore esatto})$
Errore relativo:	$e_r = \frac{e_a}{\text{valore esatto}}$

Per esempio, se un termometro indica 37° invece di 36° , abbiamo i seguenti errori:

- errore assoluto: $e_a = (\text{valore misurato}) - (\text{valore esatto}) = 37^\circ - 36^\circ = 1^\circ$
- errore relativo: $e_r = \frac{e_a}{\text{valore esatto}} = \frac{1^\circ}{36^\circ} \cong 0,028$ che può essere scritto così: $e_r \cong 2,8\%$.

Soluzioni

- 1) $0,00000005 = 5 \cdot 10^{-8}$
- 2) $4,28 \cong 4,5$.
- 3) Errore assoluto: $42,4 \text{ km/h} - 40 \text{ km/h} = 2,4 \text{ km/h}$
Errore relativo: $\frac{2,4 \text{ km/h}}{42,4 \text{ km/h}} \cong 0,0566 \cong 5,7\%$

9 Equazioni numeriche

Situazioni introduttive

$$1) (2x + 4) : 6 = 2 \Rightarrow x = ?$$

$$2) \sqrt{x + 2} = 3 \Rightarrow x =$$

L'equazione è uno strumento matematico che può servire a risolvere problemi di diverso tipo. La conoscenza delle equazioni numeriche renderà più facile l'approccio alle equazioni letterali che incontreremo nei capitoli seguenti. Risolvendo un'equazione si giunge a una soluzione mediante passaggi matematici in successione.

Esempio di equazione numerica: $(x + 5) : 2 = 8 \Rightarrow x = ?$

Le uguaglianze (e le disuguaglianze) tra numeri godono di particolari proprietà dette **leggi di monotonìa**.

Prendiamo come esempio la seguente uguaglianza: $\frac{1}{2} + 5 = \frac{9}{2} + 1$

Tutto ciò che è scritto a sinistra viene chiamato **primo membro**, tutto ciò che è scritto a destra viene chiamato **secondo membro**.

Proprietà	Definizione	Esempi
Prima legge	Un'uguaglianza resta valida se addizioniamo ai due membri uno stesso numero	$\frac{1}{2} + 5 + (-7) = \frac{9}{2} + 1 + (-7)$
Seconda legge	Un'uguaglianza resta valida se moltiplichiamo i due membri per uno stesso numero diverso da 0	$\left(\frac{1}{2} + 5\right) \cdot \frac{1}{4} = \left(\frac{9}{2} + 1\right) \cdot \frac{1}{4}$
Legge di cancellazione	Si tratta dell'operazione inversa rispetto alle due leggi precedenti	$\frac{1}{2} + 5 + 3 = \frac{9}{2} + 1 + 3$ Oppure: $\left(\frac{1}{2} + 5\right) \cdot 2 = \left(\frac{9}{2} + 1\right) \cdot 2$

Soluzioni

$$\begin{array}{ll}
 1) & (2x + 4) : 6 = 2 \\
 & 2x + 4 = 2 \cdot 6 \\
 & 2x = 12 - 4 \\
 & x = \frac{8}{2} \\
 & x = 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ll}
 2) & \sqrt{x + 2} = 3 \\
 & x + 2 = 3^2 \\
 & x = 9 - 2 = 7
 \end{array}$$

1. INTRODUZIONE

1) Spiegare le caratteristiche che differenziano le varie categorie di numeri (**N, Z, Q, I, R**).

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vero oppure false?

Affermazioni	Vero	Falso
Tutti i numeri razionali sono anche naturali		
Tutti i numeri naturali sono anche razionali		
I numeri interi positivi sono numeri naturali		
I numeri irrazionali sono anche reali		
I numeri reali sono positivi		

3) Indica (con delle crocette) **tutti** gli insiemi che contengono i numeri indicati:

	N	Z	Q	I	R
2					
-5					
$\sqrt[5]{10}$					
$\frac{6}{7}$					
$1,09\overline{3}$					
$\frac{\pi}{2}$					

4) Prova a trovare un metodo che ti permetta di calcolare la somma dei numeri da 1 a 100 ($1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$) in modo semplice (indica il risultato).

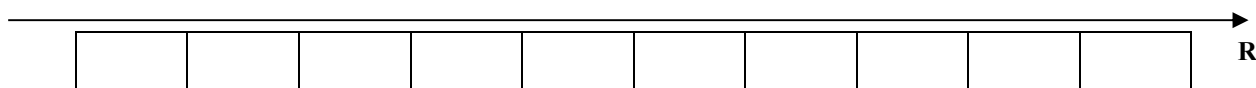
5) Tradurre le seguenti affermazioni in linguaggio algebrico considerando che n è un numero naturale:

- un qualsiasi numero pari;
- un qualsiasi numero dispari;
- la somma di tre qualsiasi numeri pari consecutivi;
- la somma di tre qualsiasi numeri dispari consecutivi;
- un numero qualsiasi naturale che diviso per 3 dia resto 1;
- l'area di un quadrato di lato n ;
- la superficie di un cerchio di diametro n .

2. RAPPRESENTAZIONI GRAFICHE

- 1) Scrivere i numeri seguenti sulla retta dei numeri reali in ordine crescente (dal più piccolo al più grande) inserendoli nei rettangolini sotto la retta dei numeri reali:

$\sqrt{2}$	0.5	$-3 \cdot \sqrt{2}$	$(-2)^2$	1.4142	$(0.5)^2$	$\frac{22}{7}$	-2	π	-2^2
------------	-----	---------------------	----------	--------	-----------	----------------	----	-------	--------



- 2) Esprimere le seguenti affermazioni in forma matematica (utilizzando i simboli adeguati):

- a) **a** è negativo:
- b) **b** non è negativo:
- c) **c** è diverso da 3:
- d) **d** è più piccolo o uguale a 5:
- e) **e** è compreso fra 2 e 4 (2 compreso, 4 escluso):
- f) **f** è almeno uguale a 7:
- g) **g** è al massimo uguale a 3:
- h) **h** appartiene all'intervallo da 2 a 5 (2 compreso, 5 no):
- i) **i** non appartiene all'intervallo da 1 a 6 (1 non compreso, 6 sì):
- j) **j** dista 4 unità dallo 0:

- 3) Completare le seguenti frasi nell'ambito dei numeri naturali:

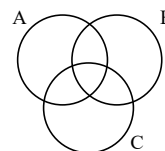
- a) Il successivo di 8 è
- b) Il precedente di 13 è
- c) Il successivo di è 10900
- d) Il precedente di è 40099
- e) I tre numeri consecutivi a 123 sono

- 4) Come si può scrivere l'informazione che il numero n dista 5 unità dallo 0?

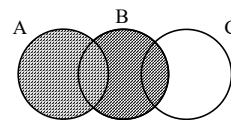
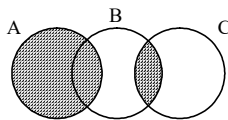
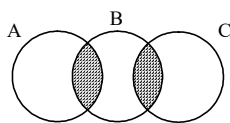
- 5) Quando due numeri sono consecutivi? Due numeri possono essere consecutivi in tutte le categorie di numeri?

- 6) Consideriamo A, B, C e D quattro punti sulla retta di coordinate rispettivamente -5, -3, 1 e 6. Rappresentare i punti sulla retta e calcolare la distanza tra A e B, tra C e B, tra lo zero e A e infine tra C e D (suggerimento: la distanza tra due punti sulla retta è definita dal valore assoluto della differenza tra le due coordinate).

- 7) Perché la retta dei numeri deve essere caratterizzata da una freccia situata a una delle due estremità?
- 8) Indicare quali, tra i seguenti, sono insiemi matematici:
- Gli allievi molto forti della tua classe.
 - I numeri naturali maggiori di 8.
 - I cantoni della Svizzera.
 - Le città più grandi della Svizzera.
- 9) Consideriamo gli insiemi numerici N, Z, Q, I, R . Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere:
- $1 \in N$;
 - $-4 \notin Z$;
 - $\sqrt{2} \in Z$;
 - $Q \in R$;
 - $I \in Z$;
 - In Q ci sono solo numeri discreti;
 - In Z ci sono solo numeri discreti.
- 10) Scrivere in forma implicita (per caratteristica) un elenco o viceversa:
- $A = \{\text{tutti i numeri pari}\}$
 - $B = \{\text{i numeri dispari da 51 a 151}\}$
 - $C = \{c \in N \mid c = [12; 20[\}$
 - $D = \{d \in Z \mid d =]-2; 4[\}$
- 11) In una classe di 15 allievi, 6 giocano a tennis, 10 giocano a calcio, 4 giocano a pallavolo e 3 allievi non praticano nessuno sport. Utilizzando tre insiemi (che chiameremo: $T = \{\text{allievi che giocano a tennis}\}$, $C = \{\text{allievi che giocano a calcio}\}$, $P = \{\text{allievi che giocano a pallavolo}\}$) rappresentare la situazione con i tre insiemi considerando che un allievo pratica calcio e pallavolo, un allievo pratica pallavolo e tennis, due allievi praticano tennis e calcio e due allievi praticano tutti e tre gli sport.
- 12) Ricopia il disegno indicato per ciascuna situazione, e colora la superficie corrispondente alle seguenti espressioni:
- $A \cap B$
 - $A \cup B$
 - $(A \cup B) \cap C$
 - $(B \cap C) \cup A$
 - $(C \cap B) \cup (A \cap C)$
 - $\overline{(A \cap B \cap C)}$
 - $(A \cap C) - (A \cap B \cap C)$



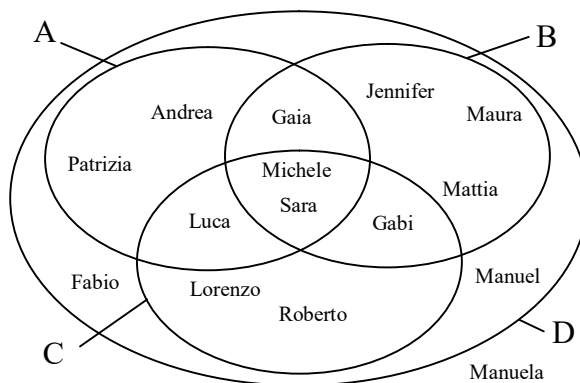
13) Esprimi mediante un'espressione la parte colorata di ciascuno dei tre casi indicati:



14) In una classe è stata fatta un'inchiesta sui tipi di letture che gli allievi amano fare nel tempo libero. Gli allievi sono stati suddivisi, secondo il tipo di lettura preferito, in 3 insiemi.

- A: lettori di fumetti
- B: lettori di libri gialli
- C: lettori di libri di fantascienza

I risultati sono poi stati riassunti nel seguente diagramma, nel quale la lettera D indica l'insieme di tutti gli allievi di quella classe.



- a) E' vero che Mattia $\in$ A?
- b) E' vero che Andrea $\notin$ C?
- c) Quali libri leggono Michele e Roberto?
- d) E' vero che Gaia legge libri gialli?
- e) Quali allievi leggono sia libri di fantascienza sia fumetti?
- f) Chi legge libri gialli, fantascienza ma non i fumetti?
- g) Quanti allievi non leggono libri gialli?
- h) Che cosa si può dire dei tipi di letture di Fabio?
- i) Che cosa si può dire dei tipi di letture di Manuela?
- j) Chi sono gli allievi corrispondenti a $A \cap B$?
- k) Chi sono gli allievi corrispondenti a $A \cap B \cap C$?
- l) Chi sono gli allievi corrispondenti a $B \cup C$?
- m) Chi sono gli allievi corrispondenti a $\overline{A \cup B \cup C}$?

3. OPERAZIONI CON I NUMERI

1) Risolvere mentalmente le seguenti operazioni (suggerimento: utilizzare le proprietà delle operazioni):

- a) $47 + 188 + 53 =$
- b) $10 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 10 =$
- c) $45 \cdot 19 =$
- d) $125 \cdot 8 \cdot 283 =$
- e) $99 + 98 + 101 + 102 =$
- f) $96 : 6 = (60 + 36) : 6 =$
- g) $173,5 : 17,35 =$
- h) $100 - [99 - (54 : 9 - 6)] =$
- i) $(201 - 51) : 30 + [2 \cdot (10 + 3 \cdot 15)] : 11 =$
- j) $17 \cdot 4 = (10 + 7) \cdot 4 =$
- k) $325 \cdot 3 = (300 + 20 + 5) \cdot 3 =$
- l) $8100 - 49 = 8100 - (50 - 1) =$
- m) $5 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 5 + 5 =$
- n) $88 + 35 + 12 + 15 = 88 + 12 + 35 + 15 =$

2) Stimare il risultato delle seguenti operazioni:

- a) Quanto costeranno 249 confezioni di 6 bottiglie di olio se ogni bottiglia costa 3,95 Fr?
- b) Tre commercianti comperano 120 articoli al costo di 15.- Fr l'uno e 75 articoli del costo di 40.- Fr l'uno. La spesa viene ripartita in parti uguali fra i tre. Quanto deve pagare ciascuno?
- c) Alla cassa del supermercato, mi presento con i seguenti prodotti:
 - 4 litri di latte a 1,95 Fr l'uno;
 - 235 g di prosciutto cotto a 6,60 Fr al hg;
 - un sacco di 2,5 kg di patate a 3,85 Fr
 - 12 uova a 0,55 Fr l'una;
 - 3 confezioni di puré di patate a 2,90 Fr l'una.Sono sufficienti due banconote da 20.- Fr per pagare il tutto?

3) L'indice di massa corporea (IMC) , che viene calcolato nel modo seguente: $IMC = \frac{\text{massa (in kg)}}{[\text{altezza (in metri)}]^2}$,

permette di stabilire se una persona si situa nella fascia di persone magre (inferiore a 18,5), normali (tra 18,5 e 25), in sovrappeso (tra 25 e 30) o obesa (più di 30).

Calcola il tuo IMC senza calcolatrice.

4) Risolvere le seguenti espressioni considerando le corrette priorità delle operazioni (prima senza e poi con la calcolatrice):

- a) $2 \cdot 3^2 + 8 : 4 - 2 =$
- b) $[(9 + 1 - 6) \cdot (3 \cdot 4 - 2)] : \{10 \cdot 2 - [4 \cdot (5 + 1 - 3)]\} =$
- c) $\sqrt{4 + 2^5} + \sqrt[3]{6 \cdot 5 - 2^2} + (-3)^2 : 3 - 2 \cdot 4^0 =$
- d) inserire $a = 2$, $b = 10$ e $c = 8$, nella formula: $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e calcolare il risultato.

5) Date le seguenti operazioni, indicare se le uguaglianze sono giuste, altrimenti scrivere i passaggi corretti:

operazione	giusta	eventuale correzione
$6 : 3 \cdot 4 + 5 = 13$		
$2 + 4 \cdot 3 - 1 = 17$		
$3^3 + 3^3 = 3^6$		
$2 \cdot 5^2 = 10^2 = 100$		
$4 \cdot (20 : 2) = (4 \cdot 20) : (4 \cdot 2) = 10$		
$2^9 : 2^3 = 2^3$		

6) Date le seguenti operazioni indicare le proprietà utilizzate per la risoluzione:

operazione	commutativa	distributiva	associativa	invariantiva
$5 \cdot (13) = 5 \cdot (10 + 3) = 50 + 15 = 65$				
$2 \cdot 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = (12) \cdot 2 = 24$				
$(8 : 4) = [(8 : 2) : (4 : 2)] = 4 : 2 = 2$				
$a^3 + b^3 = b^3 + a^3$				

7) Esprimere le seguenti affermazioni in forma matematica (utilizzando i simboli adeguati):

- a) l'opposto di e non è più grande di 3:
- b) l'inverso di g è almeno uguale a 9:
- c) il prodotto tra 2 e 5 sommato con la differenza tra 8 e 4:
- d) il quadrato di 6 aggiunto alla differenza tra 8 e il rapporto di 4 e 2:
- e) il triplo di 8 meno il doppio del numero successivo a 7:

8) Sfruttando la legge dell'annullamento del prodotto risolvere le seguenti equazioni:

- a) $(x - 5) \cdot (x + 2) = 0$
- b) $\left(x + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right) = 0$
- c) $x \cdot (x + 5) \cdot (x + 6) = 0$
- d) $(x + 1) \cdot (x - 2) \cdot 0 = \left(x - \frac{1}{2}\right)$

4. I NUMERI NATURALI

- 1) Esprimere le seguenti affermazioni in forma matematica (utilizzando i simboli adeguati) e, quando ciò è possibile, calcolarne il risultato:
 - a) sottrarre il doppio di **c** al valore assoluto di **d**
 - b) sottrarre da 12 il quoziente fra 4 e 2
 - c) aggiungere 3 al risultato del rapporto di 12 con la differenza fra 5 e 1
 - d) moltiplicare 3 per la somma di 9 e del quoziente di 14 e 2
 - e) sottrarre a 17 la differenza tra il prodotto di 8 per 2 e 9
 - f) moltiplicare il doppio di **a** per il successivo di **b**

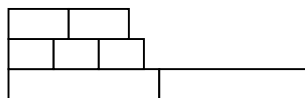
- 2) Scrivere le espressioni che forniscono le soluzioni dei seguenti problemi e calcolarne i valori:
 - a) Luca e suo fratello Andrea vanno al cinema ricevendo 10 Fr ciascuno dai propri genitori. Il costo di un biglietto è di 5 Fr; Luca acquista prima di entrare al cinema una bibita del costo di 2 Fr, mentre Andrea compera due pacchetti di patatine da 2 Fr l'uno. Complessivamente con quanto denaro ritornano a casa?
 - b) Una cuoca possiede 4 sacchetti di farina del peso di 1 kg ciascuno. Deve fare 7 dolci: nei primi 3 occorrono 350 g di farina per ciascuno e negli altri, 600 g di farina per ciascuno. Alla fine quanta farina rimane alla cuoca?

- 3) Determinare (inserendo una crocetta) i divisori del numero indicato utilizzando i criteri di divisibilità:

Il numero	È divisibile per								
	2	3	4	5	6	7	9	11	25
256									
969817254									
1112769									
768383									
155550									

- 4) Scomporre in fattori primi i seguenti numeri: 320; 660; 740; 850; 1000
- 5) Scrivere alcuni elementi dei seguenti insiemi: M_5 ; M_7 ; M_{14} ; M_{53} .
- 6) A quante settimane, giorni, ore e minuti corrispondono 24725 minuti?
- 7) Scrivere tutti i divisori dei seguenti numeri: 12; 36; 75; 264.
- 8) Trovare e rappresentare il risultato della seguente operazione: $D_{54} \cap D_{81}$.
- 9) Determinare il m.c.m. e il M.C.D. dei seguenti numeri: 60, 15 e 18.

- 10) Le cicale americane *Magicada tredecim* e *Magicada septendecim* vivono in gruppi geograficamente ben distinti, condividendo lo stesso periodo di latenza, rispettivamente di 13 e 17 anni, per poi uscire dal sottosuolo per accoppiarsi, deporre le uova e infine morire. Ogni quanti anni accade che la fine del periodo di latenza coincida e di conseguenza escano dal sottosuolo nello stesso anno?
- 11) Si vuole ricoprire un pavimento rettangolare i cui lati misurano 308 cm e 700 cm con piastrelle quadrate, il cui lato deve essere (in centimetri) un numero intero. C'è una condizione in più: bisogna che il numero di piastrelle necessarie sia il più piccolo possibile. Quanto misura il lato di ogni piastrella e quante piastrelle occorrono?
- 12) Un armadio è suddiviso in due parti. La parte a sinistra è costituita da ripiani che, a partire dal basso, sono distanti 12 cm l'uno dall'altro; nella parte di destra i ripiani si trovano invece a una distanza di 18 cm. Il mobile è alto 1,80 m.
Quante volte si verifica che il ripiano di sinistra e quello di destra si trovano alla stessa altezza?
I ripiani che si trovano alla stessa altezza si succedono, a partire dal basso, ogni quanti cm? Che particolarità ha questo numero di cm?
- 13) Un muratore deve costruire un muro intercalando regolarmente, uno sopra l'altro, tre tipi di elementi della lunghezza di 126 cm, 42 cm e 60 cm. L'architetto gli ha detto di continuare fin quando il margine di destra diventa un segmento verticale (vedi figura). Quanto risulterà lungo il muro?



- 14) Un piastrellista vuole posare delle piastrelle su una parete rettangolare dietro i fornelli della cucina lunga 2,25 m e alta 90 cm. Ha visto delle belle piastrelle quadrate lunghe 10 cm (fughe comprese!). Per motivi estetici vuole utilizzare un numero intero di piastrelle quadrate (non vuole cioè tagliare delle piastrelle). Potrà utilizzare le piastrelle viste o ne dovrà scegliere delle altre? Quale misura dovrà avere il loro lato? (Osservazione: non ha la possibilità di scegliere piastrelle di lato inferiore a 2 cm e superiore a 20 cm)
- 15) Un'antica leggenda narra che Sussa ibn Dahir, inventore del gioco degli scacchi, fu invitato dal suo re Shiram a esprimere un desiderio come ricompensa della sua geniale invenzione. Egli chiese semplicemente che venisse messo un chicco di riso sulla prima casella della scacchiera, due chicchi sulla seconda, quattro chicchi sulla terza e così via, raddoppiando ogni volta la quantità precedente. La sua ricompensa sarebbe stata quel numero di chicchi di riso sull'ultima casella. Di fronte a una richiesta in apparenza tanto modesta, il re si meravigliò molto, non rendendosi conto che, per soddisfarla appieno, sarebbe servito un ammontare di chicchi esagerato. Infatti, se fosse possibile ricoprire uniformemente l'intera superficie terrestre (compresi mari, oceani, deserti e ghiacciai) corrispondente a circa 511 milioni di km² con una quantità di riso del genere, quanti chicchi ci starebbero in ogni centimetro quadrato?

5. NUMERI INTERI

- 1) Date le seguenti operazioni, stabilire se sono vere o false (motivare la scelta):

operazione	vero	falso
$-4 > -2$		
$ -6 < 6$		
-5 è l'opposto di $\frac{1}{5}$		
$-6^2 = 36$		
$\sqrt[3]{-8} = -2$		
$5 - (-3) = 8$		
$(-6) : (-3) = 2$		
$ -2 \geq -2$		
La somma di due numeri opposti dà 0		

- 2) Effettuare le seguenti operazioni:

a) $3 \cdot (-5) =$	b) $(-2) \cdot (-6) =$
c) $(-4) \cdot (-5) \cdot (+2) =$	d) $(-15) : 3 =$
e) $(-4)^2 =$	f) $-3^2 =$
g) $(-2)^3 =$	h) $[-(-2)^3]^2 =$
i) $3^{-2} =$	j) $(-2)^{-2} =$

- 3) Completare la seguente tabella sostituendo le lettere con i numeri indicati (semplificare i risultati il più possibile):

a	b	-a	$-a^2$	$(-2a)^2$	$-2b^2$	a : b	$(a - b)^2$	$10a^2b^3$
3	-2							

- 4) Inserire $a = -3$, $b = 10$ e $c = -4$, nella formula: $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e calcolare il risultato.

- 5) La massima profondità dell'Oceano Pacifico è di 11022 m, mentre il Monte Everest è alto 8848 m .
Quanto vale il dislivello tra questi due estremi?

- 6) Una corsa in montagna parte da Lugano (275 m.s.m), sale di 545 m sino a Brè, scende di 224 sino a Cureggia e risale di 920 m sino al Monte Boglia. Da lì si scende 387 m fino all'Alpe Bolla, si risale di 362 m fino ai Denti della Vecchia e infine si scende di 1016 m fino al traguardo di Cadro. A che altezza si trova il paese di Cadro? Quanto vale il dislivello percorso in salita? E quello percorso in discesa?
- 7) Un amministratore di una ditta vuole riportare in un grafico i guadagni e le perdite subite in un anno. Egli possiede la seguente tabella (i guadagni e le perdite sono espresse in migliaia di franchi) e da essa desidera ottenere un grafico e calcolare l'importo globale alla fine dell'anno.

mesi	gen	feb	mar	apr	mag	giu	lug	ago	set	ott	nov	dic
guadagni	100	200			400	300	300				100	
perdite			300	500				100	300	500		800

Si domanda:

- di disegnare un grafico che rappresenti l'andamento della situazione finanziaria della ditta;
 - di calcolare il risultato finanziario a fine anno commentando il risultato finale.
- 8) Per misurare il livello di un lago, viene posato un galleggiante che indica l'altezza dell'acqua rispetto a un punto ben definito (che chiameremo punto O) considerato il livello di riferimento. Nell'arco di un anno vengono effettuate 12 misurazioni che indicano lo spostamento del galleggiante (in cm) rispetto alla posizione del mese precedente. La prima misurazione indica lo spostamento rispetto al punto O:

mesi	gen	feb	mar	apr	mag	giu	lug	ago	set	ott	nov	dic
spostamento	-20	-30	10	-20	60	10	-40	-60	0	-30	10	-20

Si domanda:

- di calcolare la posizione finale del galleggiante rispetto al punto O;
- di calcolare la distanza totale percorsa verticalmente dal galleggiante durante tutto l'anno (suggerimento: utilizzare il valore assoluto).

6. NUMERI RAZIONALI

1) Trasformare il seguente numero nelle frazioni per le quali viene indicato il denominatore:

a) $6 = \frac{\quad}{2} = \frac{\quad}{3} = \frac{\quad}{5} = \frac{\quad}{6} = \frac{\quad}{15}$

b) $2 = \frac{\quad}{2} = \frac{\quad}{3} = \frac{\quad}{5} = \frac{\quad}{6} = \frac{\quad}{15}$

2) Semplificare le seguenti frazioni:

a) $\frac{6}{8} =$

b) $\frac{14}{21} =$

c) $\frac{64}{128} =$

3) Vero o falso?

operazione	vero	falso	eventuale correzione
$\frac{b \cdot a}{a \cdot c} = \frac{b}{c}$			
$\frac{a \cdot b}{c \cdot d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d}$			
$\frac{a}{c} = \frac{a+b}{c+b}$			
$\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{ad}{cb}$			
$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d}$			
$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2:4}{3:5}$			
$\frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$			
$\frac{4}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{15}$			
$\frac{1}{2} < \frac{3}{5}$			
$-\frac{1}{4} = \frac{-1}{4} = \frac{1}{-4}$			
$5 : 0 = 0$			
$0 : 0 = 6$			
$0 : -3 = 0$			

4) E' più veloce un atleta che percorre 10 giri dello stadio in 9 minuti oppure un secondo atleta che percorre 15 giri in 14 minuti?

5) Scrivere:

- a) una frazione il cui quoziente è un numero intero positivo;
- b) una frazione il cui quoziente è un numero intero negativo;
- c) una frazione il cui quoziente è un numero decimale finito;
- d) una frazione il cui quoziente è un numero decimale periodico;
- e) una frazione il cui dividendo è il doppio del divisore.

6) Risolvere e semplificare i risultati delle seguenti operazioni:

a) $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} =$

c) $4 - \frac{1}{3} =$

e) $\frac{2}{4} : \frac{1}{2} =$

g) $\frac{4}{9} : \left(-\frac{8}{27}\right) =$

i) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} =$

k) $\left\{ \left[\left(-\frac{1}{3} - 2 \right) : \left(5 - \frac{1}{3} \right) \right] - \frac{2}{3} - \left(4 - \frac{1}{2} \right) \right] - 1 \right\} : \left(-\frac{1}{3} + 2 \right) =$

m) $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}} =$

o) $\frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{6}} =$

b) $\frac{2}{3} - \frac{3}{2} =$

d) $\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} =$

f) $(-1) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) =$

h) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 =$

j) $\frac{3^{-2}}{5} =$

l) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) : \frac{10}{7} + \frac{6+4}{2} =$

n) $\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} =$

p) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{5} - \frac{1}{\frac{3}{4}}} =$

7) Trasformare la seguenti frazioni in percentuali:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{3}{2}$

c) $\frac{5}{8}$

d) $\frac{7}{20}$

8) Trasformare le seguenti percentuali in frazioni ridotte ai minimi termini:

a) 60%

b) 1%

c) 75%

d) 18%

9) Esprimere ciascuno dei seguenti numeri decimali come frazione semplificata il più possibile:

a) 0,125

b) 1,024

c) $2, \overline{2}$

d) $9,87\overline{654}$

- 10) Sapendo che il latte contiene panna per circa l'11% della sua massa e che la panna produce burro per il 27% della sua massa, calcola quanti kg di burro si possono ricavare da 125 kg di latte. Quanti kg di latte sono necessari per ottenere 10 kg di panna, rispettivamente, 10 kg di burro?
- 11) Se il prezzo di un oggetto diminuisce del 20%, quale percentuale di aumento si dovrà riapplicare per ritrovare il prezzo iniziale?
- 12) Un adulto ha 32 denti, un bambino di 4 anni $\frac{3}{8}$ in meno. Infatti, mentre tutti gli altri denti (denti di latte) spuntano nel bimbo e cadono dopo qualche anno per far posto a quelli definitivi, i molari spuntano una sola volta (verso i 5-6 anni) e fanno parte della dentatura definitiva. In un adulto $\frac{1}{4}$ è costituito da incisivi, $\frac{1}{8}$ da canini, $\frac{1}{4}$ da premolari, $\frac{3}{8}$ da molari. Quanti denti ha, normalmente, un bambino? Quanti incisivi, quanti canini, quanti premolari e quanti molari ha normalmente un adulto?
- 13) In un negozio, una scatola di 20 CD vuoti costa 19,95 Fr. Una vendita per corrispondenza offre 100 CD al prezzo di 99.- Fr. Infine, una ditta specializzata vende CD vuoti a 1,50 Fr l'uno, ma, per acquisti che comportano 100 o più pezzi, concede uno sconto del 33%. Dovendo comperare 100 CD, quale delle tre offerte è la migliore?
- 14) Negli ultimi giorni dei saldi invernali, Marco decide di acquistare un casco che in vetrina risulta scontato del 24%. Dato che è l'ultimo pezzo, il proprietario del negozio riduce ulteriormente il prezzo effettuando uno sconto supplementare del 7%, e così Marco spende 176,70 Fr. Quanto costava il casco prima dei saldi?
- 15) Completare la seguente tabella semplificando le frazioni ai minimi termini:

a	$-\frac{1}{3}$	4	-5		12		$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{9}$	-38
m	2			5	0	9	-1		
a ^m		64	-125	-32		1		81	1

- 16) Fare un esempio di due grandezze direttamente proporzionali e di due grandezze inversamente proporzionali.

7. NUMERI IRRAZIONALI

1) Completare la seguente tabella (regole o calcoli):

Regole	Risolvere e semplificare il più possibile:
1) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m =$	$\sqrt[9]{2^3} =$
2) $\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} =$	$\sqrt[9]{64} =$
3) $x^m \cdot x^n =$	$\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{3} =$
4) $\frac{b^x}{b^y} =$	$\frac{4^{39}}{4^{40}} =$
5) $(c^p)^q =$	$\sqrt[3]{\sqrt{5}} =$
6) $(ef)^d =$	$\sqrt{12} =$
7) $\left(\frac{c}{d}\right)^m =$	$\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)} =$
8) $a^{-m} =$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} =$

2) Risolvere le seguenti operazioni utilizzando le regole sulle potenze:

a) $3^2 \cdot 3^5 : 3^6 =$	b) $\frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 2^2}{2^4 \cdot 3} =$
c) $(-6)^9 : (-6)^3 =$	d) $[2^3 \cdot 5^3]^2 : (-10)^3 =$
e) $2^{3^2} =$	f) $-[(-2)^3]^2 =$
g) $-2^{3^2} =$	h) $(-2^3)^2 =$

3) Semplificare i seguenti radicali (se possibile):

a) $\sqrt[6]{\frac{25}{64}} =$	b) $\sqrt{4^2 + 3^2} =$
c) $\sqrt{80} =$	d) $\sqrt[3]{9a^3} =$
e) $\sqrt{a^4 b^6} =$	f) $\sqrt{9} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt{3} =$
g) $\sqrt[4]{\frac{1}{2}} : \sqrt[3]{\frac{1}{2}} =$	h) $\sqrt{\sqrt{16}} =$

8. NUMERI REALI

1) Scrivere i seguenti numeri dalla notazione scientifica in forma decimale:

- a) $2 \cdot 10^3$;
- b) $56 \cdot 10^5$;
- c) $78 \cdot 10^{-5}$;
- d) $156 \cdot 10^{-8}$.

2) Scrivere i seguenti numeri dalla forma decimale in notazione scientifica:

- a) 1'000'000;
- b) 23'000'000'000'000;
- c) 0,0004;
- d) 0,000000000023.

3) Effettuare le seguenti operazioni senza utilizzare la calcolatrice (utilizzare le regole delle potenze):

- a) $3 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^6 =$
- b) $8 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^3 =$
- c) $12 \cdot 10^9 : 3 \cdot 10^6 =$
- d) $\frac{3 \cdot 10^{12} + 5 \cdot 10^{12} - 4 \cdot 10^{12}}{200 \cdot 10^{10}} =$
- e) $3 \cdot 10^{-4} \cdot 6 \cdot 10^{12} \cdot 4 \cdot 10^{-8} =$

4) Effettuare le seguenti operazioni utilizzando la calcolatrice (attenzione alle priorità delle operazioni):

- a) $23 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^8 \cdot 54 \cdot 10^{-12} \cong$
- b) $\frac{(0,000000039)^2 \cdot (591000)^3}{(197000)^2} \cong$
- c) $\sqrt{(56 \cdot 10^6)^3 + (6 \cdot 10^{-12})^2} : 48 \cdot 10^{-4} \cong$
- d) $35000000000 + 18 \cdot 10^9 : (2 \cdot \sqrt{125} \cdot 10^9) \cong$

5) Il corpo umano contiene mediamente 5 litri di sangue e una goccia di sangue umano (di 6 mm^3) contiene circa 30 milioni di globuli rossi.

- a) Quanti globuli rossi ci sono mediamente nel corpo umano?
- b) 10'000 globuli rossi, disposti l'uno accanto all'altro lungo una retta, coprirebbero un segmento di 7 mm. Quanti km sarebbe lungo il segmento coperto da tutti i globuli rossi di un essere umano?

6) Problemi con i numeri grandi:

- a) Quanti battiti ha effettuato il cuore di un novantenne durante tutta la sua vita, se ogni minuto, in media, il suo cuore batte 70 volte?
- b) A quanti anni di vita corrispondono un miliardo di secondi?
- c) Quanto vale la superficie della Terra sapendo che il raggio terrestre vale circa 6380 km?
- d) Quanto vale il volume della Terra?
- e) Quanto vale il volume del Sole e quante volte è approssimativamente più grande della Terra (il raggio del Sole vale circa $6,95 \cdot 10^8$ m)?
- f) Quante volte, approssimativamente, la massa del Sole è maggiore della massa della Terra?
(massa del Sole = $1,9891 \cdot 10^{30}$ kg, massa della Terra = $5,98 \cdot 10^{24}$ kg)

7) Un anno luce corrisponde alla distanza che la luce, viaggiando ad una velocità di circa 300'000 km al secondo, percorre in un anno. Si domanda:

- a) quanti km percorre la luce in un anno?
- b) quanto tempo impiega la luce per giungere dal Sole sulla Terra? (distanza Terra-Sole = 150'000'000 km)
- c) quanti anni luce dista la stella a noi più vicina ($3,75 \cdot 10^{13}$ km)?

8) La massa del Sole è di circa $1,97 \cdot 10^{29}$ kg; si valuta che la nostra galassia (la Via Lattea) possieda una massa complessiva di $1,5 \cdot 10^{11}$ masse solari. La massa dell'universo conosciuto è pari ad almeno 10^{11} volte la massa della nostra galassia. Calcolare approssimativamente la massa dell'universo conosciuto.

9) Calcolare l'errore assoluto e relativo di un indicatore di velocità che visualizza 60 km/h invece di 58 km/h.

10) La misura effettuata da un contagiri di una moto indica il regime di rotazione del motore ad un certo istante con un errore massimo di + 5%. Si domanda di determinare:

- a) il valore indicato se il regime di rotazione del motore è di 8000 giri/minuto con un errore del 3%;
- b) l'intervallo di possibili valori indicati quando il regime di rotazione del motore è di 6800 giri/minuto;
- c) la percentuale di errore quando il regime di giri effettivo è di 5000 giri/min e sono indicati 5080 giri/min;
- d) il valore esatto del regime di rotazione quando lo strumento indica 8500 giri/minuto con un errore del 5%.
- e) la formula letterale che permette di risolvere le 4 domande.

9. EQUAZIONI NUMERICHE

1) Nella sequenza di passaggi successivi delle seguenti equazioni, indica quale operazione matematica viene effettuata:

a) $x + 5 = 8 \Rightarrow x + 5 - 5 = 8 - 5$

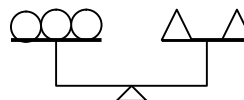
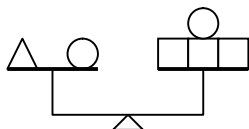
b) $a + b = b + a \Rightarrow a + b + 1 = b + a + 1$

c) $ab = ba \Rightarrow 3ab = 3ba$

d) $\frac{a}{b} = c \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot b = b \cdot c$

2) Trovare i numeri corrispondenti a ciascun simbolo:
$$\begin{cases} \nabla + \Delta + O = 11 \\ \Delta + \Delta + \nabla = 12 \\ \Delta + \Delta + \Delta + \Delta = 10 \end{cases}$$

3) Le due bilance sono in equilibrio. Gli oggetti rappresentati con la stessa figura hanno la stessa massa.



A quanti quadrati corrisponde un triangolo? A quanti quadrati corrisponde un cerchio?

4) Pensa a un numero di due cifre; sottrai entrambe le cifre dal numero che hai pensato dal numero stesso; il numero trovato è sicuramente divisibile per 9. Perché?

5) Dalle seguenti formule ricavare la lettera indicata:

a) $s = a + b \Rightarrow b = ?$

b) $3a - b = 9 \Rightarrow b = ?$

c) $y = 3x + 2 \Rightarrow x = ?$

d) $y + 2 = 3x + 4 \Rightarrow x = ?$

e) $ax + b = c \Rightarrow x = ?$

f) $y - 6 = m(x - 3) \Rightarrow x = ?$

g) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a = ?$

h) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow b = ?$

i) $\frac{x-8}{2} = 4 \Rightarrow x = ?$

j) $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = ?$

k) $A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow b = ?$

l) $s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = ?$

m) $A = \frac{B+b}{2} \cdot h \Rightarrow B = ?$

n) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \Rightarrow y = ?$