

B) Calcolo letterale

In questo capitolo verranno trattati i seguenti argomenti:

- Regole di scrittura e terminologia dell'algebra (variabile, costante, espressione, somma algebrica, monomio, polinomio, ...)
- Operazioni algebriche di base con monomi e polinomi (regole di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevazione a potenza applicando le proprietà commutativa, associativa, distributiva)
- Prodotti notevoli (moltiplicazione tra polinomi, fattorizzazione)
- Scomposizione in fattori (scomposizione di polinomi mediante le tecniche di messa in evidenza, raccoglimenti parziali, uso dei prodotti notevoli, trinomio tipico)
- Frazioni algebriche (semplificazioni, operazioni con le frazioni algebriche, frazioni a termini frazionari, razionalizzazione dei denominatori)
- Terminologia e regole di risoluzione delle equazioni (uguaglianza, equazione, identità, principio della bilancia)
- Equazioni intere
- Equazioni fratte (condizioni di esistenza)
- Equazioni letterali (formule)
- Sistemi di equazioni (metodi di risoluzione)
- Risoluzione di problemi (messa in equazione: matematizzazione)

1 Introduzione

Domanda introduttiva

Come si può scrivere con simboli matematici che l'area di un trapezio è data dalla lunghezza media delle sue basi (dette, rispettivamente, base maggiore e base minore) moltiplicata per l'altezza?

Il calcolo letterale (o calcolo algebrico) è uno strumento matematico che permette di generalizzare la descrizione di situazioni reali utilizzando le lettere (formule) che verranno sostituite da valori numerici. Per esempio, se vogliamo descrivere la relazione tra area, base e altezza di un triangolo, scriveremo:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}.$$

A partire da questa formula sarà possibile calcolare l'area di qualsiasi triangolo: infatti, a dipendenza dei valori numerici di b (base) e h (altezza), basterà inserire al posto delle lettere i valori numerici che ci interesseranno per calcolare l'area.

Per utilizzare correttamente il linguaggio letterale è necessario fissare alcune regole.

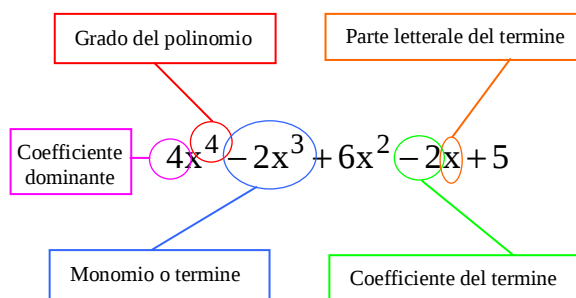
Regole di scrittura	Spiegazioni
$a \times b = a \cdot b = a b = ab$	Il segno $\times$ viene sostituito con il punto. Se non ci sono ambiguità anche il punto o lo spazio possono essere tralasciati.
$a : b = \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$	La divisione può essere scritta nei modi indicati.
$(-5) \cdot a = -5a$	Normalmente la scrittura utilizzata è quella a destra. In alcuni casi bisogna ricordarsi di quanto sta scritto a sinistra, per esempio nel calcolo con le potenze: $-5a^2 = (-5) \cdot a^2$, da non confondere con: $(-5a)^2 = [(-5) \cdot a]^2 = (-5)^2 \cdot a^2 = 25a^2$. Oppure: $(-x)^2 = [(-1) \cdot x]^2 = (-1)^2 \cdot x^2 = x^2$.
$n \cdot a = a + a + a + \dots$ (n volte)	Il coefficiente numerico indica quante volte viene effettuata la somma della lettera indicata, per esempio: $1a = a$; $2a = a + a$; $3a = a + a + a$.
$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots$ (n volte)	Il valore dell'esponente indica quante volte viene effettuata la moltiplicazione della lettera indicata, per esempio: $a^1 = a$; $a^2 = a \cdot a$; $a^3 = a \cdot a \cdot a$.
$a = 1 \cdot a = a^1 = \frac{a}{1}$	Normalmente si utilizza la scrittura a sinistra. In determinate operazioni può essere utile ricordare le altre tre forme. Per esempio: 1) $a \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^1 \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{1+\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{2}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$ $\frac{1}{b} = \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a \cdot b}$ 2) $\frac{b}{a} = \frac{b}{\frac{1}{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a \cdot b}$

Nella tabella seguente vengono riassunti i termini usati comunemente nell'ambito del calcolo letterale. L'intenzione è quella di presentare in modo compatto il vocabolario già utilizzato nelle scuole precedenti e che si incontrerà anche nei prossimi capitoli:

Terminologia	Significato	Esempi
variabile	lettera che può assumere diversi valori (può rappresentare qualsiasi elemento di un dato insieme)	$a, b, c, m, \dots (\in \mathbf{R})$ oppure $a \in \mathbf{N}$
costante	lettera che sostituisce un valore fisso (può rappresentare un singolo elemento di un insieme)	$\pi (= 3,14\dots)$
espressione algebrica	espressione formata da una qualsiasi combinazione di numeri e lettere, connessi tra loro da operazioni matematiche	$2x - 3y + 1; \frac{5x^3 - 1}{4xy + 1};$ $R^2 \cdot \pi \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$
somma algebrica	espressione algebrica formata da parti collegate tra loro mediante segni di addizione e/o sottrazione	$3x - 2y + 4z$
equazione algebrica	uguaglianza tra due espressioni algebriche, le cui variabili possono assumere solo determinati valori	$A = \frac{B+b}{2} \cdot h$
termine	singolo elemento di una somma algebrica costituito da segno algebrico , coefficiente e parte letterale : tra le lettere compaiono solo moltiplicazioni e potenze (gli esponenti delle lettere sono numeri interi positivi)	$-2x; 6xy; 3a^5b^3$
termini simili	termini con la stessa parte letterale	$3xy; -2xy; 45xy$
monomio	sinonimo di termine	$-2x; 6xy; 3a^5b^3$
forma normale monomio	coefficienti e parti letterali corrispondenti unificate (monomio ridotto)	$-2ab^23b^3a^2 = -6a^3b^5$
binomio	somma algebrica composta da due termini	$(a + b); (2x - 3y)$
polinomio	somma algebrica di più termini	$3x^2 - 2x + 6$
forma normale polinomio	polinomio ridotto	$6a^4b^2 - 3a^3b^5 + 2a^4b^2 = 8a^4b^2 - 3a^3b^5$
grado del polinomio	il grado di un polinomio rispetto a una lettera è il maggiore degli esponenti rispetto a tale lettera	$3x^2 - 2x + 6$ è un polinomio in x , di 2. grado
uguaglianza	caratterizzata dal seguente simbolo: $=$	$6xy = 5z + 2y$ $x = 3$ si può scrivere: $3 = x$
equazione	uguaglianza con soluzioni determinate (le soluzioni si chiamano anche radici , ossia valori che verificano l'equazione)	$x^2 - x = 3x \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4$
identità	uguaglianza per la quale è possibile sostituire l'incognita con qualsiasi valore (corrisponde a un'equazione indeterminata)	$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x \in \mathbf{R}$

Esempio:

Polinomio di 4 grado nella variabile x:



Forma generale di un polinomio in x:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

Oppure: $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$

Esempio:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 6$$

- Grado del polinomio: 3
- Coefficiente dominante: $a_3 = 1$

Soluzione

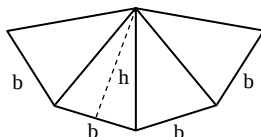
Come si può scrivere con simboli matematici che l'area di un trapezio è data dalla lunghezza media delle sue basi (dette, rispettivamente, base maggiore e base minore) moltiplicata per l'altezza?

Nel modo seguente: $A = \frac{B+b}{2} \cdot h$

2 Operazioni algebriche di base

Situazione introduttiva

Una piazza è composta da quattro triangoli uguali, di cui non si conoscono le dimensioni, ma unicamente le lettere che rappresentano le basi e le altezze. Si desidera quindi esprimere la formula della superficie totale della piazza utilizzando le lettere al posto dei numeri:



Vediamo subito la soluzione:

$$A_{\text{tot}} = A_{\text{triangolo}} + A_{\text{triangolo}} + A_{\text{triangolo}} + A_{\text{triangolo}} = \left(\frac{b \cdot h}{2}\right) + \left(\frac{b \cdot h}{2}\right) + \left(\frac{b \cdot h}{2}\right) + \left(\frac{b \cdot h}{2}\right)$$

Semplifichiamo la nostra formula:

$$A_{\text{tot}} = \left(\frac{b \cdot h}{2}\right) + \left(\frac{b \cdot h}{2}\right) + \left(\frac{b \cdot h}{2}\right) + \left(\frac{b \cdot h}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{b \cdot h}{2}\right) = \frac{4}{2} \cdot (b \cdot h) = 2 \cdot (b \cdot h) = 2bh$$

Queste trasformazioni rappresentano un'applicazione del calcolo algebrico con i monomi.

La conoscenza delle operazioni con monomi e polinomi permette la risoluzione delle equazioni che sono una delle principali applicazioni del calcolo algebrico.

2.1 Operazioni con monomi

Operazione algebrica	Esempi
Riduzione a forma normale .	$-2ab^23b^3a^2 = -2 \cdot 3 \cdot a \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot b^3 = -6 \cdot a^{1+2} \cdot b^{2+3} = -6a^3b^5$
Per eseguire la somma di monomi (la sottrazione non è nient'altro che la somma di termini opposti) è necessario che i termini siano simili.	$5ab + 6a$ = non possono essere sommati (i termini non sono simili) invece: $4a^2b - 8a^2b + 6a^2b = 2a^2b$
La moltiplicazione tra monomi viene effettuata utilizzando le proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione e le proprietà delle potenze.	$-2y \cdot 4x^2y \cdot 3xy^2 = -2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y^2 = -24 \cdot x^{2+1} \cdot y^{1+1+2} = -24x^3y^4$
La divisione tra monomi è possibile solo se il risultato soddisfa la definizione di monomio, ossia il risultato deve essere costituito da un termine con un segno algebrico , un coefficiente e una parte letterale : tra le lettere compaiono solo moltiplicazioni e potenze (gli esponenti delle lettere sono numeri naturali positivi).	$-8m^3n^2 : 4mn = (-8 \cdot m^3 \cdot n^2) : (4 \cdot m \cdot n) =$ $= (-8 : 4) \cdot (m^3 : m) \cdot (n^2 : n) = -2 \cdot m^{3-1} \cdot n^{2-1} = -2m^2n$ invece: $-8m^3n^2 : 4mn^3 = (-8 \cdot m^3 \cdot n^2) : (4 \cdot m \cdot n^3) =$ $= (-8 : 4) \cdot (m^3 : m) \cdot (n^2 : n^3) = -2 \cdot m^{3-1} \cdot n^{2-3} = -2m^2n^{-1}$ il risultato non è un monomio (le potenze della parte letterale devono essere numeri naturali)
Per effettuare l' elevazione a potenza applicare le proprietà delle potenze.	$(-2a^2b^3)^2 = (-2 \cdot a^2 \cdot b^3)^2 = (-2)^2 \cdot (a^2)^2 \cdot (b^3)^2 = 4 \cdot a^{2 \cdot 2} \cdot b^{3 \cdot 2} = 4a^4b^6$

2.2 Operazioni con i polinomi:

Ricordiamo le principali operazioni con i polinomi:

Operazioni algebriche	Esempi
Riduzione a forma normale .	$6a^4b^2 - 3a^3b^5 + 2a^4b^2 = 8a^4b^2 - 3a^3b^5$
Per eseguire la somma algebrica di polinomi si raggruppano i termini simili, in base alla proprietà commutativa e associativa.	$(2x^2 + 7x - 5) + (3x^2 - 11x + 8) =$ $= (2x^2 + 3x^2) + (7x - 11x) + (-5 + 8) = 5x^2 - 4x + 3$
Sottrazione di una somma algebrica	$-(3x^2 - 4x + 5) = -3x^2 + 4x - 5 \quad \text{Ecco la spiegazione:}$ $-(3x^2 - 4x + 5) = (-1) \cdot (3x^2 - 4x + 5) =$ $(-1) \cdot (3x^2) - (-1) \cdot (4x) + (-1) \cdot (5) = -3x^2 + 4x - 5$
Per moltiplicare fra loro i polinomi si fa uso della proprietà distributiva e associativa della moltiplicazione unitamente alle proprietà delle potenze.	$(x^4 - 5x^2 + 7) \cdot (3x^2 + 2) = (x^4 - 5x^2 + 7) \cdot (3x^2) + (x^4 - 5x^2 + 7) \cdot (2) =$ $= (3x^6 - 15x^4 + 21x^2) + (2x^4 - 10x^2 + 14) =$ $= 3x^6 - 13x^4 + 11x^2 + 14$
La divisione tra polinomi viene effettuata con lo stesso principio della divisione numerica, che ricordiamo con l'esempio seguente:	$\begin{array}{r} \overline{679} : 24 = 28 \\ - (48) \\ \hline 199 \\ - (192) \\ \hline \text{Resto } 7 \end{array}$ $67 : 24 = 2, \dots$ $199 : 24 = 8, \dots$ Verifica: $28 \cdot 24 + 7 = 679$ $\begin{array}{r} (12y^3 + 36y^2 - 38y + 42) : (2y + 8) = 6y^2 - 6y + 5 \\ - (12y^3 + 48y^2) \\ \hline 0 - 12y^2 - 38y + 42 \\ - (-12y^2 - 48y) \\ \hline 0 \quad 10y + 42 \\ - (10y + 40) \\ \hline \text{Resto : } 0 \quad 2 \end{array}$ $12y^3 : 2y = 6y^2$ $-12y^2 : 2y = -6y$ $10y : 2y = 5$ Verifica: $(6y^2 - 6y + 5) \cdot (2y + 8) + 2 = (12y^3 + 36y^2 - 38y + 42)$
L'elevazione a potenza può essere effettuata applicando le regole della moltiplicazione. Oppure (vedi paragrafo seguente: "i prodotti notevoli"), si possono utilizzare altre tecniche.	$(3x + 2)^2 = (3x + 2) \cdot (3x + 2) = 9x^2 + 6x + 6x + 4 = 9x^2 + 12x + 4$

3 Prodotti notevoli

Situazione introduttiva

- 1) Come risolvere direttamente, senza applicare la proprietà distributiva, $(3x + 2)^2$?
- 2) Come si può semplificare la seguente frazione: $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$?

Alcuni prodotti tra polinomi si presentano molto frequentemente. Invece di effettuare ogni volta la moltiplicazione applicando le proprietà distributiva e associativa, si può giungere più velocemente al risultato se si conoscono i seguenti **prodotti notevoli** (identità):

- 1) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- 2) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- 3) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- 4) $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
- 5) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
- 6) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- 7) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Ricordiamo che le lettere a e b sono lettere qualsiasi. Esse permettono di generalizzare i prodotti notevoli sostituendo lettere, numeri o espressioni. In effetti i prodotti notevoli potrebbero essere descritti anche con simboli qualsiasi. Per esempio, il prodotto notevole 1) diventerebbe:

$$(\Delta + O) \cdot (\Delta - O) = \Delta^2 - O^2.$$

E' molto importante saper passare da una forma all'altra (somma algebrica $\leftrightarrow$ prodotto). Queste operazioni sono chiamate **sviluppo** di un prodotto, rispettivamente **fattorizzazione** di una somma algebrica.

Prodotto notevole		Forma esponenziale		Somma algebrica
$(a + b) \cdot (a + b)$	=	$(a + b)^2$	=	$a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b) \cdot (a - b)$	=	$(a - b)^2$	=	$a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b)$	=	$(a + b)^3$	=	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a - b) \cdot (a - b) \cdot (a - b)$	=	$(a - b)^3$	=	$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a + b) \cdot (a - b)$	=	impossibile	=	$a^2 - b^2$
$(a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$	=	impossibile	=	$a^3 + b^3$
$(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$	=	impossibile	=	$a^3 - b^3$
impossibile		impossibile		$a^2 + b^2$
Prodotto notevole	$\xrightarrow{\text{sviluppo}}$ $\xleftarrow{\text{fattorizzazione}}$			Somma algebrica

Attenzione: $a^2 + b^2$ non si può fattorizzare! In ogni caso $a^2 + b^2 \neq (a + b)^2$

I prodotti notevoli possono essere dimostrati eseguendo la moltiplicazione e semplificando i risultati, oppure in modo geometrico come indicato nell'esempio seguente:

La superficie totale di un quadrato di lato $(a + b)$ vale:

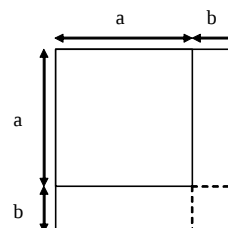
$$A = (a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2 \quad 1)$$

ma corrisponde anche alla somma delle 4 aree parziali:

$$A = a^2 + b^2 + a \cdot b + a \cdot b = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad 2)$$

Di conseguenza:

$$1) = 2) : (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



Ecco alcuni esempi:

$$a) \quad (3x - 2y)(3x + 2y) = (3x)^2 - (2y)^2 = 9x^2 - 4y^2$$

$$b) \quad (7x^2 + 3y^3)^2 = (7x^2)^2 + 2(7x^2 \cdot 3y^3) + (3y^3)^2 = 49x^4 + 42x^2y^3 + 9y^6$$

$$c) \quad [(3a - 2) + b] \cdot [(3a - 2) - b] = (3a - 2)^2 - b^2 = 9a^2 - 12ab + 4 - b^2$$

$$d) \quad (x^4 - 1) = (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 1)$$

Soluzioni

1) $(3x + 2)^2$ è un'espressione del tipo: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, quindi:

$$(3x + 2)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot (2) + (2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$$

$$2) \quad \frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{(a + b) \cdot (a - b)}{a - b} = a + b$$

4 Scomposizione in fattori

Situazioni introduttive

Come ritrovare i prodotti che danno la somma indicata?

1) $9x^2 + 12x + 4 = ?$

2) $x^2 - 2x + 1 = ?$

Come semplificare le seguenti frazioni:

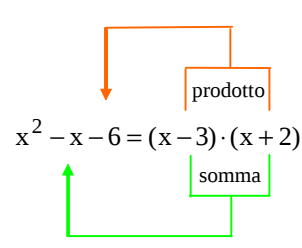
3) $\frac{2a + 2b}{a + b} = ?$

4) $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a - b} = ?$

Calcolare le soluzioni della seguente equazione: 5) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = ?$

Quando due o più espressioni algebriche sono moltiplicate fra di loro, ciascuna di esse prende il nome di **fattore**. Spesso, trattando prodotti già sviluppati (cioè delle somme algebriche) si ha la necessità di individuare i fattori originali, per esempio per semplificare una frazione o per risolvere un'equazione. Il processo utilizzato nella ricerca di tali fattori viene detto **scomposizione in fattori (fattorizzazione)**. Si tratta del procedimento inverso dello sviluppo di un polinomio.

Vediamo alcune tecniche di scomposizione in fattori:

Tecniche di scomposizione	Esempi
1) Raccoglimento a fattore comune (messa in evidenza)	$6a + 2ab = 2a(3 + b)$
2) Raccoglimento parziale	$ax + ay - bx - by = a(x + y) - b(x + y) = (x + y)(a - b)$
3) Scomposizione tramite i prodotti notevoli (vedi paragrafo precedente)	$81b^4 - 1 = (9b^2 - 1)(9b^2 + 1) = (3b - 1)(3b + 1)(9b^2 + 1)$
4) Trinomio tipico: $(x + a) \cdot (x + b) = x^2 + (a + b) \cdot x + a \cdot b$	 $x^2 - x - 6 = (x - 3) \cdot (x + 2)$

Soluzioni

1) $9x^2 + 12x + 4$ è del tipo: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, quindi: $9x^2 + 12x + 4 = (3x + 2)^2$

2) $x^2 - 2x + 1$ è del tipo: $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$, quindi: $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

3) $\frac{2a + 2b}{a + b} = \frac{2(a + b)}{a + b} = 2$

4) $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a - b} = \frac{(a - b)^2}{a - b} = a - b$

5) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x^2(x + 2) - (x + 2) = 0 \Rightarrow (x + 2)(x^2 - 1) = 0$

Da cui si ricavano le tre soluzioni: $(x + 2)(x + 1)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = -2; x = -1; x = 1$

5 Frazioni algebriche

Situazioni introduttive

Risolvere le seguenti operazioni con le frazioni algebriche:

a) $\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=?$ b) $\frac{cd-c^2}{c^2-d^2}=?$ c) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=?$ d) $\frac{4+x}{2}=?$

Una frazione algebrica è una frazione che ha dei polinomi al numeratore e/o al denominatore. Il polinomio al denominatore **non può essere uguale a 0**. Per esempio:

$\frac{2x+3}{x-5}$ non ammette che al posto della variabile x si possa inserire il numero 5 (impossibile dividere per

0). In questo caso si dice che la frazione ha come **condizioni di esistenza** (o anche **condizioni iniziali** o **valori eccezionali**) C.E.: $x \neq 5$. È possibile **semplificare** le frazioni algebriche soltanto se al numeratore e al denominatore si possono evidenziare dei fattori comuni.

Regola	Esempi
$\frac{p \cdot k}{q \cdot k} = \frac{p}{q}$	1) $\frac{2a}{8} = \frac{2 \cdot a}{2 \cdot 4} = \frac{a}{4}$ 2) $\frac{2x-4}{2} = \frac{2(x-2)}{2} = x-2$ 3) $\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2} = \frac{(a+b) \cdot (a-b)}{(a+b) \cdot (a+b)} = \frac{a-b}{a+b}$

Il fattore comune k può rappresentare **un'intera espressione numerica**, **un'espressione algebrica** oppure un **numero**. In tutti i casi: $k \neq 0$!

La frazione semplificata il più possibile si dice ridotta ai **minimi termini**.

L'operazione inversa si dice **amplificazione** (serve, per esempio, per determinare i denominatori comuni nel caso di una somma di frazioni).

5.1 Operazioni con le frazioni algebriche

Operazione	Regole	Esempi
addizione	$\frac{p}{q} + \frac{r}{q} = \frac{p+r}{q}$ $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps}{qs} + \frac{rq}{qs} = \frac{ps+rq}{qs}$	$\frac{1}{a} + \frac{3}{a} = \frac{4}{a} \quad (\text{C.E.: } a \neq 0)$ $\frac{1}{6b} + \frac{-2}{3b} + \frac{1}{2b} = \frac{1+(-2) \cdot 2 + 1 \cdot 3}{6b} = \frac{0}{6b} \quad (\text{C.E.: } b \neq 0)$
sottrazione	$\frac{p}{q} - \frac{r}{q} = \frac{p-r}{q}$ $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{ps}{qs} - \frac{rq}{qs} = \frac{ps-rq}{qs}$	$\frac{2+x}{m} - \frac{3-2x}{m} = \frac{(2+x)-(3-2x)}{m} = \frac{2+x-3+2x}{m} = \frac{3x-1}{m}$ $(\text{C.E.: } m \neq 0)$ $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x-1) \cdot (x+1)} = \frac{x^2+2x+1 - (x^2-2x+1)}{x^2-1} =$ $= \frac{x^2+2x+1-x^2+2x-1}{x^2-1} = \frac{4x}{x^2-1} \quad (\text{C.E.: } x \neq \pm 1)$
moltiplicazione	$\frac{p}{q} \cdot r = \frac{pr}{q}$ $\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}$	$\frac{3}{d} \cdot 4 = \frac{12}{d} \quad (\text{C.E.: } d \neq 0)$ $\frac{a^3-b^3}{a-b} : \frac{a^2+ab+b^2}{a^2-2ab+b^2} = \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a-b} \cdot \frac{(a-b)^2}{a^2+ab+b^2} =$ $= (a-b)^2 \quad (\text{C.E.: } a \neq \pm b)$
divisione	$\frac{p}{q} : r = \frac{p}{qr}$ $\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r} = \frac{ps}{qr}$	$\frac{6}{b} : 2 = \frac{6}{2b} = \frac{3}{b} \quad (\text{C.E.: } b \neq 0)$ $\frac{t^4-16}{(t-2)^2} : \frac{4+t^2}{t-2} = \frac{(t^2-4)(t^2+4)}{(t-2)^2} \cdot \frac{(t-2)}{4+t^2} = \frac{t^2-4}{t-2} =$ $= \frac{(t+2)(t-2)}{t-2} = t+2 \quad (\text{C.E.: } t \neq 2)$

5.2 Frazioni algebriche a termini frazionari

Una frazione algebrica che contiene al numeratore e/o al denominatore una o più frazioni algebriche viene chiamata frazione algebrica a **termini frazionari**.

Regola	Esempio
$\frac{\frac{p}{q}}{\frac{r}{s}} = \frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r} = \frac{ps}{qr}$	$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Per esempio $\frac{1+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}$ è una frazione algebrica a termini frazionari e si risolve così:

Abbiamo: C.E.: $x \neq 0$ inoltre: $x - \frac{1}{x} \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1$

$$\text{La soluzione è: } \frac{1+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}} = \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x^2-1}{x}} = \frac{x+1}{x^2-1} \cdot \frac{x}{x} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1}$$

5.3 Razionalizzazione del denominatore

Talvolta è più facile trattare le frazioni contenenti radicali se questi non compaiono al denominatore. Il procedimento che permette di ottenere frazioni senza radicali al denominatore si dice **razionalizzazione del denominatore**. In pratica si procede nel modo seguente:

$$\text{a) } \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

La frazione viene amplificata per $\sqrt{5}$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} = \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x-6\sqrt{x}+9}{x-9}$$

La frazione viene amplificata utilizzando il prodotto notevole $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

$$\text{c) } \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1+\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2}{1+\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1+\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2}{1-x}$$

La frazione viene amplificata utilizzando il prodotto notevole $(a-b) \cdot (a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

Soluzioni

$$\text{a) } \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x+1}{x-2} \quad (\text{C.E.: } x \neq 2)$$

$$\text{b) } \frac{cd-c^2}{c^2-d^2} = \frac{c(d-c)}{(c-d)(c+d)} \cdot \frac{-1}{-1} = \frac{c(c-d)}{(c-d)(-c-d)} = \frac{c}{-c-d} = -\frac{c}{c+d} \quad (\text{C.E.: } c \neq -d)$$

$$\text{c) } \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{1 \cdot (x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{1 \cdot (x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{(x^2-1)} \quad (\text{C.E.: } x \neq \pm 1)$$

$$\text{d) } \frac{4+x}{2} = \frac{4+x}{2} \quad (\text{non si può semplificare!})$$

6 Equazioni di primo grado

Situazioni introduttive

Risolvere le seguenti equazioni:

$$1) (2x+3)(6x-1)-9=15x^2-(3x-2)(x-2)$$

$$2) \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x-1}$$

$$3) \frac{4}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{5x-6}{x^2-4}$$

Le equazioni consistono in un'uguaglianza tra due espressioni algebriche per la quale si cercano i valori da attribuire a una o più lettere in modo tale che la verifichino. Le equazioni daranno la possibilità di risolvere i problemi che si incontreranno in ambito professionale e nei corsi di MPT.

Le equazioni possono essere classificate nel modo seguente:

Rispetto...	Denominazione: equazione ...	Esempi:
... al numero di incognite	... a 1 incognita ... a 2 incognite ... a 3 incognite	$x+5=6$ $x+y=10$ $x+y+z=6$
... ai termini	... intera ... fratta o frazionaria	$2x+5=6x-3$ $\frac{3x-1}{x} + \frac{5}{x-1} = 0$
... ai coefficienti	... numerica ... letterale	$4x(x+2)=0$ $3ax+2=5-2a$
... al tipo di soluzioni	... determinata ... indeterminata ... impossibile	$3x=6 \Rightarrow x=2$ $0x=0 \Rightarrow x \in \mathbf{R}$ $x^2+1=x^2 \Rightarrow$ non ci sono soluzioni
... all' operazione indicata dall'incognita	... di primo grado ... di secondo grado ... di grado superiore ... irrazionale ... esponenziale ... logaritmica ... trigonometrica ...	$4x-2=0$ $x^2=9$ $x^4+2x^3-x^2=2x$ $\sqrt{x}+2=4$ $2^x=16$ $\log(x)=2$ $\cos(x)=\frac{1}{2}$...

Vediamo qui di seguito i principali termini utilizzati nell'ambito delle equazioni:

Terminologia	Definizione	Esempi
Uguaglianza	Caratterizzata dal simbolo: $=$	$2ab + 5 = 3x - 4$ oppure $6 + 3 = 5 + 4$
Equazione	Uguaglianza tra due espressioni (chiamate membri dell'equazione) contenente una variabile detta incognita (generalmente si utilizzano le ultime lettere dell'alfabeto: x, y, z, ... oppure, meglio ancora, le lettere corrispondenti alle grandezze in gioco).	$x^2 - x = 3x$ oppure $s = v \cdot t$
Equazione letterale	Equazione contenente, oltre all'incognita, altre lettere che svolgono il ruolo di costanti (generalmente si utilizzano le prime lettere dell'alfabeto: a, b, c, ...).	$ax + b = 0$
Risolvere un'equazione	Determinare tutte le soluzioni dell'equazione.	Per risolvere $(x + 1)(x - 2) = 0$ si uguaglia ciascun membro a 0: $(x + 1) = 0$ da cui $x = -1$ $(x - 2) = 0$ da cui $x = 2$.
Soluzioni o radici dell'equazione	Valori numerici che sostituiti all'incognita risolvono (si dice anche: verificano o soddisfano) l'equazione.	Soluzioni o radici di $x^2 = 4$ sono: $x = 2$ e $x = -2$. Infatti: $2^2 = 4$ e $(-2)^2 = 4$
Soluzioni estranee	Quando l'incognita può assumere solo determinati valori ma che però non possono essere accettati perché rendono l'equazione iniziale impossibile.	$\frac{3x}{x-2} = \frac{x+4}{x-2}$; C.E.: $x \neq 2$ $3x = x + 4$ $x = 2 \Rightarrow$ soluzione estranea
Equazioni equivalenti	Equazioni che hanno la stessa soluzione.	$2x = 4$ e $4x = 8$
Equazioni di primo grado (anche equazioni lineari)	Equazioni che possono essere scritte nella forma: $ax + b = 0$.	$2x - 4 = 0$
Equazione ...	... determinata : x assume solo determinati valori in un determinato insieme numerico;	$x + 4 = 6 \Rightarrow x = 2$
	... indeterminata : x può assumere qualsiasi valore;	$x + 4 = \frac{2x+8}{2} \Rightarrow 0x = 0$
	... impossibile : x non può assumere nessun valore in un determinato insieme numerico (per esempio: $2x = 5$ è un'equazione impossibile in N e Z ma è determinata in Q e R : $x = 2,5$).	$x + 4 = x + 6 \Rightarrow 0x = 2$
Identità	Uguaglianza soddisfatta da qualsiasi sostituzione (equazione indeterminata).	$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x \in \mathbf{R}$

Per risolvere un'equazione è necessario **isolare** l'incognita (isolare significa lasciare l'incognita, a sinistra o a destra dell'uguale, da sola). Si tratta quindi di procedere nel modo seguente: si parte dall'equazione iniziale e si individuano, in successione, equazioni equivalenti in modo da giungere all'equazione che presenta l'incognita isolata e uguagliata ad un'espressione priva dell'incognita stessa.

Si può trasformare un'equazione in un'altra ad essa equivalente considerando il **principio della "bilancia"** (due membri di un'equazione sono paragonabili al contenuto di due piatti di una bilancia che rimane in equilibrio se l'operazione che si fa da una parte la si fa anche dall'altra). Per esempio è possibile:

1)	addizionare o sottrarre la stessa quantità ad ambo i membri dell'equazione;
2)	moltiplicare o dividere i membri dell'equazione per la stessa quantità diversa da 0;
3)	semplificare uno o entrambi i membri dell'equazione;
4)	scambiare fra di loro i due membri dell'equazione;
5)	elevare entrambi i membri alla stessa potenza (attenzione alle potenze pari!).
6)	...

Suggerimento: nella risoluzione di un'equazione complicata, può essere utile **scrivere** l'operazione matematica effettuata durante i diversi passaggi successivi. Lo scopo è quello di riflettere in modo più approfondito sull'operazione scelta e di evitare (spesso) errori di calcolo.

Ricordiamo infine la legge dell'annullamento (se $a \cdot b = 0$ allora le soluzioni sono $a = 0$ e $b = 0$). Se per esempio è necessario risolvere un'equazione del tipo: $x^2 + x = 6$, procederemo così:

$$x^2 + x = 6$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x - 2)(x + 3) = 0$$

Le due soluzioni sono quindi: $x = 2$, $x = -3$.

6.1 Equazioni intere

Le equazioni numeriche intere sono le equazioni a coefficienti numerici in cui **l'incognita non è presente in alcun denominatore** (il termine intero è riferito all'incognita e non ai coefficienti, i quali possono essere frazionari).

Per esempio: $\frac{1}{2}x - 3 = \frac{1}{5}$ è un'equazione intera.

Normalmente si moltiplica tutta l'equazione per il m.c.m., togliendo così i denominatori:

$$\frac{1}{2}x - 3 = \frac{1}{5}$$

si moltiplica per il m.c.m. di 2 e 5, ossia 10

$$5x - 30 = 2$$

si aggiunge 30

$$5x = 32$$

si divide per 5

$$x = \frac{32}{5}$$

6.2 Equazioni fratte

Un'equazione è fratta se **l'incognita compare in almeno un denominatore**.

Esempio: $\frac{2}{x^2 - x} - \frac{4}{x^2 - 1} = \frac{1}{x^2 + x}$

Prima di risolvere un'equazione fratta, dobbiamo determinare le **condizioni di esistenza** delle frazioni algebriche presenti, ossia i valori che l'incognita non potrà assumere.

Poi si può procedere alla risoluzione. La soluzione trovata sarà accettabile se rispetta le condizioni di esistenza.

Il procedimento di risoluzione può essere riassunto nel modo seguente:

- prima di incominciare la risoluzione determinare (e scrivere) le condizioni di esistenza;
- determinare il più piccolo denominatore comune;
- moltiplicare tutti i membri delle equazioni per il denominatore comune e semplificare;
- risolvere l'equazione;
- verificare il risultato (consultare le condizioni di esistenza).

Esempio: $\frac{2}{x^2 - x} - \frac{4}{x^2 - 1} = \frac{1}{x^2 + x}$

Riscriviamo l'equazione fattorizzando i denominatori: $\frac{2}{x(x-1)} - \frac{4}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x(x+1)}$

Le due frazioni hanno significato solo se: $x \neq 0$, $x+1 \neq 0$ e $x-1 \neq 0$.

Infatti le condizioni di esistenza sono **C.E.**: $x \neq 0$ e $x \neq \pm 1$.

Risolviamo l'equazione:

$$\begin{array}{ll} \frac{2}{x(x-1)} - \frac{4}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x(x+1)} & \text{moltiplichiamo i due membri per il m.c.m.: } x(x+1)(x-1) \text{ e otteniamo:} \\ 2(x+1) - 4x = (x-1) & \text{distributiva} \\ 2x + 2 - 4x = x - 1 & \text{si sommano i termini simili} \\ -2x + 2 = x - 1 & \text{si aggiungono } 2x \text{ e } 1 \\ 3 = 3x & \text{si divide per } 3 \\ x = 1 & \end{array}$$

E' ora necessario il controllo della soluzione:

poiché la soluzione $x = 1$ è incompatibile con la condizione di esistenza $x \neq 1$, la soluzione non può essere accettata, quindi l'equazione non ha soluzioni.

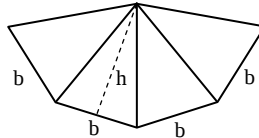
Soluzioni

- a) $(2x+3)(6x-1)-9=15x^2-(3x-2)(x-2)$ Distributiva
 $12x^2+18x-2x-3-9=15x^2-(3x^2-2x-6x+4)$ Associativa
 $12x^2+18x-2x-3-9=15x^2-3x^2+2x+6x-4$ Togliere le parentesi
 $12x^2+16x-12=12x^2+8x-4$ Sottrarre $12x^2$
 $16x-12=8x-4$ Sottrarre $8x$
 $8x-12=-4$ Sommare 12
 $8x=8$ Dividere per 8
 $x=1$ Soluzione:
 l'equazione è determinata, $x=1$
- b) $\frac{1}{x(x-1)}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x-1}$ Condizioni di esistenza: C.E.:
 $x \neq 0, x \neq 1$
 Moltiplicare per il m.c.m. ossia:
 $x(x-1)$
 $1-x+1=x$ Sommare x
 $2=2x$ Dividere per 2
 $x=1$ $x=1$ è una soluzione estranea (vedi C.E.)
 Quindi si tratta di un'equazione senza soluzione
- c) $\frac{4}{x+2}+\frac{1}{x-2}=\frac{5x-6}{x^2-4}$ Condizioni di esistenza: C.E.:
 $x \neq \pm 2$
 Moltiplicare per x^2-4
 $4(x-2)+1(x+2)=5x-6$ Distributiva
 $5x=5x$ Sottrarre $5x$
 $0x=0$ Equazione indeterminata, ma vanno esclusi i valori non accettabili (vedi C.E.).
 La soluzione è: $\{x \in \mathbf{R} \mid x \neq \pm 2\}$

6.3 Equazioni letterali

Situazione introduttiva

Una piazza è composta da quattro triangoli, di cui non si conoscono le dimensioni, ma unicamente le lettere che rappresentano le basi e l'altezza. Sapendo che è possibile risalire ai valori numerici di superficie e altezza, si desidera determinare la formula che esprime la base b (incognita) in funzione di A_{tot} e h :



Le formule che descrivono fenomeni naturali, sono equazioni letterali nelle quali le lettere diventano incognite a dipendenza dei dati conosciuti e sconosciuti. Per esempio se l'area del trapezio è:

$A = \frac{B+b}{2} \cdot h$ può darsi che, conoscendo l'area A , l'altezza h e la base maggiore B è necessario dover

calcolare la base minore b . In questo caso bisogna saper risolvere l'equazione letterale rispetto all'incognita b . Si tratta quindi di risolvere un'equazione letterale.

Le equazioni letterali contenenti un'incognita possono essere risolte con i metodi esposti nel paragrafo precedente. In particolare queste tecniche permettono di isolare qualsiasi variabile contenuta nelle formule che si incontrano nel calcolo professionale.

Esempio 1:

il volume di una sfera è dato dalla seguente equazione: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$. Determinare l'equazione che esprime il raggio della sfera in funzione del volume:

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$ si moltiplica l'equazione per $\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} \cdot V = \pi \cdot R^3$ si divide l'equazione per π

$\frac{3}{\pi \cdot 4} \cdot V = R^3$ si applica la radice cubica ai due membri dell'equazione

$$\sqrt[3]{\frac{3}{\pi \cdot 4} \cdot V} = R$$

Esempio 2:

la superficie di un cilindro vale: $S = 2 \cdot R^2 \cdot \pi + R \cdot 2 \cdot \pi \cdot h$. Determinare h in funzione delle altre lettere:

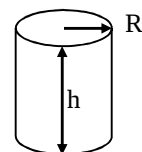
$$S = 2 \cdot R^2 \cdot \pi + R \cdot 2 \cdot \pi \cdot h$$

si sottrae: $2 \cdot R^2 \cdot \pi$

$$S - 2 \cdot R^2 \cdot \pi = R \cdot 2 \cdot \pi \cdot h$$

si divide per: $R \cdot 2 \cdot \pi$

$$\frac{S - 2 \cdot R^2 \cdot \pi}{2 \cdot R \cdot \pi} = h$$



Soluzione

In questo caso si tratta di risolvere un'equazione letterale in funzione dell'incognita b:

$$A_{\text{tot}} = 2 \cdot (b \cdot h)$$

$$\frac{A_{\text{tot}}}{2} = b \cdot h$$

$$b = \frac{A_{\text{tot}}}{2} : h$$

$$b = \frac{A_{\text{tot}}}{2h}$$

7 Sistemi di equazioni

Situazione introduttiva

Il biglietto di entrata di un cinema costa 15.- Fr per gli adulti, 10.- per i bambini e 12.- per gli anziani. L'incasso della proiezione pomeridiana è stato di 1780.- Fr. Sapendo che sono stati venduti in totale 135 biglietti e che i bambini erano la metà degli adulti, calcolare il numero di adulti, bambini e anziani che hanno visto il film.

Nel caso in cui è necessario risolvere un problema che presenta più di un'incognita, bisogna individuare un numero di equazioni pari al numero di incognite. In altri termini si tratta di risolvere un **sistema di equazioni**. Esso si presenta con una serie di equazioni raccolte da una parentesi graffa. Risolvere un sistema di equazioni significa determinare i valori di **tutte le incognite** affinché esse soddisfino simultaneamente tutte le equazioni.

Esempio:

$$\begin{cases} 6y + 4x - 2 = 0 \\ \frac{3x}{2} = \frac{y+7}{2} \end{cases}$$

Dapprima si consiglia di riscrivere il sistema **ridotto a forma normale** (semplificando le equazioni e ordinando termini e valori numerici). Inoltre può essere utile **numerare** tutte le equazioni:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 & 1) \\ 3x - y = 7 & 2) \end{cases}$$

La risoluzione potrà poi essere effettuata con uno dei metodi presentati nella pagina seguente.

$\begin{cases} 2x + 3y = 1 & 1) \\ 3x - y = 7 & 2) \end{cases}$		
Metodo della sostituzione	Metodo dell'addizione o della sottrazione	Metodo del confronto
Il metodo consiste nell'estrarre da un'equazione un'incognita e di sostituire poi l'espressione equivalente nell'altra equazione in modo da ottenere un'equazione contenente una sola incognita.	Il metodo consiste nel sommare o sottrarre , termine per termine, i membri delle due equazioni in modo da ottenere un'equazione contenente una sola incognita.	Il metodo consiste nell'estrarre dalle due equazioni la stessa incognita e poi uguagliare le due espressioni in modo da ottenere un'equazione contenente una sola incognita.
Da una delle due equazioni si isola un'incognita, per esempio: da 1): $2x + 3y = 1$ $2x = 1 - 3y$ $x = \frac{1 - 3y}{2}$	Dapprima si moltiplicano per tre tutti i membri della seconda equazione (in modo tale che quando si sommeranno le due equazioni la lettera y scompaia): $3 \cdot 2)$: $9x - 3y = 21$	Da tutte e due le equazioni isoliamo, per esempio, l'incognita y: da 1): $2x + 3y = 1 \Rightarrow y = \frac{1 - 2x}{3}$ da 2): $3x - y = 7 \Rightarrow y = 3x - 7$
Si sostituisce nella seconda equazione quanto ottenuto dalla prima equazione e si risolve	Ora si sommano le due equazioni risolvendo rispetto all'incognita rimasta:	A questo punto si uguagliano (confronto) le due espressioni a destra dell'incognita e si risolve:
1) in 2): $3 \cdot \left(\frac{1 - 3y}{2}\right) - y = 7$ $3 \cdot (1 - 3y) - 2y = 14$ $3 - 9y - 2y = 14$ $-11y = 11$ $y = -1$	1) + 2): $2x + 3y + 9x - 3y = 1 + 21$ $11x = 22$ $x = 2$	1) = 2): $\frac{1 - 2x}{3} = 3x - 7$ $1 - 2x = 9x - 21$ $-11x = -22$ $x = 2$
Da una delle due equazioni si calcola l'altra incognita:	Da una delle due equazioni si calcola l'altra incognita:	Da una delle due equazioni si calcola l'altra incognita:
da 1): $x = \frac{1 - 3 \cdot (-1)}{2} = 2$	da 2): $3 \cdot 2 - y = 7$ $6 - y = 7$ $y = -1$	da 2): $3 \cdot 2 - y = 7$ $6 - y = 7$ $y = -1$

Soluzione

Il biglietto di entrata di un cinema costa 15.- Fr per gli adulti, 10.- Fr per i bambini e 12.- Fr per gli anziani. L'incasso della proiezione pomeridiana è stato di 1780.- Fr. Sapendo che sono stati venduti in totale 135 biglietti e che i bambini erano la metà degli adulti, calcolare il numero di adulti, bambini e anziani che hanno visto il film.

Siano: x = numero di adulti, y = numero di bambini, z = numero di anziani.

Possiamo scrivere le seguenti equazioni:

$$\begin{array}{ll} x + y + z = 135 & \text{(la somma degli spettatori corrisponde al numero di biglietti venduti)} \\ 15x + 10y + 12z = 1780 & \text{(l'incasso totale risulta dalla somma dei versamenti di ciascuna categoria di spettatori)} \\ y = \frac{x}{2} & \text{(il numero di bambini corrisponde alla metà del numero di adulti)} \end{array}$$

Otteniamo quindi il seguente sistema di tre equazioni, ridotto a forma normale:

$$\begin{cases} x + y + z = 135 & 1) \\ 15x + 10y + 12z = 1780 & 2) \\ x - 2y = 0 & 3) \end{cases}$$

Dalla equazione 3) isoliamo la lettera x :
da 3) $x = 2y$

Sostituiamo nelle altre due equazioni l'incognita x con $2y$:

$$3) \text{ in } 1): 2y + y + z = 135 \text{ che diventa: } 3y + z = 135$$

$$3) \text{ in } 2): 15(2y) + 10y + 12z = 1780 \text{ che diventa: } 40y + 12z = 1780$$

$$\text{semplificabile ancora per 4: } 10y + 3z = 445$$

A questo punto otteniamo un sistema di due equazioni con due incognite:

$$\begin{cases} 3y + z = 135 & 1) \\ 10y + 3z = 445 & 2) \end{cases}$$

Utilizzando nuovamente il metodo della sostituzione, isoliamo z dall'equazione 1):
da 1): $z = 135 - 3y$

Sostituiamo nell'equazione 2) l'incognita z con $135 - 3y$:

$$1) \text{ in } 2): 10y + 3(135 - 3y) = 445 \text{ che diventa: } y = 40$$

$$\text{Da } 1): z = 135 - 3 \cdot 40 = 15$$

$$\text{Da } 3): x = 2 \cdot 40 = 80$$

La soluzione del problema è la seguente:

le persone che hanno visto il film sono 80 adulti, 40 bambini e 15 anziani.

8 Risoluzione di problemi con le equazioni

Situazione introduttiva

Salgo una montagna a 6 km/h e scendo a 10 km/h. Quanto vale la velocità media ?
(Attenzione! Il risultato non è 8 km/h)

I problemi che si presentano in ambito professionale (o con i quali si è confrontati quotidianamente) vengono solitamente espressi a parole piuttosto che mediante simboli matematici. Sarà quindi importante saper tradurre un problema in espressioni matematiche che permetteranno di giungere ad una soluzione con le regole viste nei paragrafi precedenti. Si tratterà, in altre parole, di **matematizzare** un problema. Mettendo in relazione queste espressioni si giungerà ad un'equazione: ciò presuppone la capacità di saper manipolare o semplificare i due membri dell'equazione con le regole del calcolo algebrico.

Come affrontare i problemi?

Non esistono regole particolari. A volte ci si può aiutare con situazioni già viste precedentemente (non imparate comunque le procedure a memoria!). In altri casi sarà necessario tentare diversi approcci al problema, studiandolo da diversi punti di vista. Magari idee strane possono rivelarsi utili. Sappiate che l'approccio ai problemi è una competenza molto importante e che anche se non si giunge subito allo schema risolutivo, questa attività è un ottimo allenamento. E' comunque quasi sempre utile procedere nel modo indicato qui sotto, considerando che, a dipendenza del problema, alcuni punti, in certi casi potranno essere magari poco importanti, mentre in altri casi saranno determinanti, per giungere alla soluzione. Se verrà applicata la procedura seguente, un piccolo passo nella giusta direzione sarà già stato fatto.

Ecco alcuni consigli per risolvere i problemi:

1)	Si inizia leggendo attentamente il problema finché non lo si è compreso a fondo . Ci si può aiutare, quando ciò è possibile, con una rappresentazione della situazione (disegno, schema, ...). Si individua la domanda .
2)	Si elencano tutte le quantità conosciute indispensabili alla risoluzione del problema e si definiscono le incognite .
3)	A partire dai dati conosciuti e dalle incognite si scrivono delle relazioni algebriche (equazioni parziali).
4)	Si riassumono le relazioni algebriche individuate nel punto 3 in un'unica equazione che contenga una sola incognita.
5)	Si risolve l'equazione rispetto all'incognita.
6)	Si analizza il risultato verificando che sia effettivamente la soluzione dell'equazione (equazione determinata) e che corrisponda a quanto richiesto nel problema.

Mostriamo nella pagina seguente due problemi risolti applicando questi 6 punti:

Esempio 1:

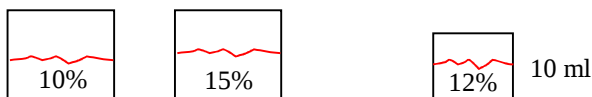
Un numero è più piccolo di un altro di 15 unità. Il triplo del primo numero sommato al doppio del secondo dà 80. Determinare i due numeri.

- 1) Quali sono i due numeri?
- 2) m = primo numero, n = secondo numero
- 3) $m = n - 15$ 1)
 $3m + 2n = 80$ 2)
- 4) Sostituiamo m nell'equazione 2) con $n - 15$
 1) in 2): $3(n - 15) + 2n = 80$
- 5) $3n - 45 + 2n = 80$
 $5n = 125$
 $n = 25, m = 25 - 15 = 10$
- 6) verifica:
 da 1): $m = n - 15 = 25 - 15 = 10$
 da 2): $3m + 2n = 3 \cdot 10 + 2 \cdot 25 = 80$

Esempio 2:

Un chimico dispone di due soluzioni del medesimo acido con una concentrazione rispettivamente del 10% e del 15%. Quanti ml di ciascuna delle due soluzioni devono essere mescolate per ottenere 10 ml di soluzione acida al 12%?

- 1) Quanti ml di ciascuna delle due soluzioni devono essere mescolate?



- 2) x = quantità (in ml) della prima soluzione, $10 - x$ = quantità (in ml) della seconda soluzione
- 3) 10% (x) = quantità di acido dalla prima soluzione,
 15% ($10 - x$) = quantità di acido dalla seconda soluzione,
 12% (10) = quantità di acido dalla soluzione finale
- 4) $10\% (x) + 15\% (10 - x) = 12\% (10)$
- 5) Risoluzione:

$$\frac{10}{100}(x) + \frac{15}{100}(10 - x) = \frac{12}{100}(10)$$

$$10x + 150 - 15x = 120$$

$$-5x = 120 - 150$$

$$x = \frac{-30}{-5}$$

$$x = 6$$
- 6) La soluzione è: prima quantità = 6 ml, seconda quantità = $10 \text{ ml} - 6 \text{ ml} = 4 \text{ ml}$
 Verifica:
 $10\%(6) + 15\%(10 - 6) = 12\%(10)$
 $0,6 + 0,6 = 1,2$

Soluzione

La velocità media si calcola nel modo seguente: $v_{\text{media}} = \frac{s_{\text{percorso}}}{t_{\text{totale}}}.$

Lo spazio percorso all'andata è uguale allo spazio percorso al ritorno: se chiamiamo s la distanza tra il punto di partenza e la cima della montagna, lo spazio percorso vale $2s$.

Il tempo totale è la somma del tempo di andata (t_1) e il tempo di ritorno (t_2) che sono diversi (infatti le velocità di percorrenza sono diverse).

Il tempo totale vale quindi: $t_{\text{totale}} = t_1 + t_2$

Sappiamo però che il tempo di percorrenza, in generale si calcola in questo modo: $t = \frac{s}{v}$

Di conseguenza il tempo totale possiamo esprimerlo così: $t_{\text{totale}} = t_1 + t_2 = \frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}$

Esprimiamo ora la velocità media nel modo seguente: $v_{\text{media}} = \frac{s_{\text{percorso}}}{t_{\text{totale}}} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}}$

Semplificando l'espressione otteniamo: $v_{\text{media}} = \frac{s_{\text{percorso}}}{t_{\text{totale}}} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2s}{s \cdot \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right)} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$

(la semplificazione di s mostra che per calcolare la velocità media non è necessario sapere quanto vale la distanza tra la partenza e la cima della montagna. In altre parole, in questo caso, la velocità media è indipendente dallo spazio!)

Finalmente possiamo inserire i valori numerici e calcolare la velocità media:

$$v_{\text{media}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{6[\text{km/h}]} + \frac{1}{10[\text{km/h}]}} = 7,5[\text{km/h}]$$

Con questo esempio si voleva dimostrare l'importanza del ragionamento approfondito piuttosto che una risposta affrettata causata, probabilmente, da una situazione apparentemente semplice.

1. INTRODUZIONE

- 1) Riscrivere le seguenti espressioni nella forma più semplificata possibile:

$a \times b =$		$x + x + x + x + x + x =$	
$x \cdot y =$		$m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m =$	
$(p : q) / r =$		$x^0 \cdot x^1 =$	
$(-6) \cdot a \cdot b =$		$\frac{a}{1} =$	
$[(-1) \cdot a]^2 =$		$\frac{1/2}{2} =$	

- 2) Spiegare e fare un esempio riferito ai seguenti vocaboli:

variabile	equazione algebrica	binomio	forma normale polinomio
costante	termine	polinomio	uguaglianza
espressione algebrica	termini simili	grado del polinomio	equazione
somma algebrica	monomio	forma normale monomio	identità

- 3) Tra le seguenti espressioni indicare quali sono monomi e spiegare perché vengono escluse le altre:

$$3^{-2}a^2b^3x; \quad 4a^2xy^{-1}; \quad \frac{x}{2}; \quad \frac{a+2}{3x}; \quad (a-b) \cdot 2; \quad R^2\pi; \quad \frac{b \cdot h}{2}$$

- 4) Tra le seguenti espressioni indicare quali sono polinomi e spiegare perché vengono escluse le altre:

$$2a + \frac{1}{2}a; \quad x^2 + 3x; \quad \left(\frac{1}{2}x\right) \cdot 8ay; \quad 2 + \frac{a}{b}; \quad \frac{a+2}{3}; \quad \frac{x}{3} + 2x^2 - 1$$

- 5) Dato il seguente polinomio: $P(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$, scrivere:

- in quale variabile viene espresso il polinomio;
- quanto vale il grado del polinomio;
- il monomio contenente il coefficiente dominante;
- il coefficiente dominante;
- il risultato del polinomio per $x = 1$.

6) Ridurre i seguenti monomi a forma normale, scrivendo i passaggi necessari:

a) $2a^2bx^2 \cdot \frac{1}{2}ax^4\left(-\frac{4}{3}b\right) =$

b) $\left(-\frac{1}{4}b\right)x^2(-3)xy^32y^2 =$

c) $\frac{a}{2}yc^3\left(-\frac{1}{5}\right)by^2a^2 =$

d) $4a^3\left(-\frac{1}{4}\right)a^42\left(-a^8\right) =$

e) $a^4b\left(-\frac{1}{2}\right)^3a^2\left(\frac{5}{2}\right)b^3(-4)a^2 =$

7) Rappresentare con un monomio semplificato le seguenti grandezze geometriche:

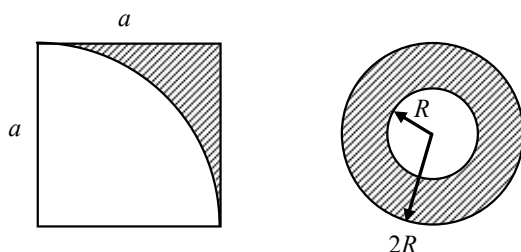
- a) l'area di un quadrato di lato $3x$;
- b) l'area di un rettangolo di base $3a$ e altezza doppia rispetto alla base;
- c) la somma delle superfici di 3 triangoli rettangoli e isosceli con i lati uguali lunghi a ;
- d) l'area di un triangolo equilatero di lato a ;
- e) il volume di un cilindro il cui raggio misura $2a$ e l'altezza è quadrupla del raggio.

8) Determinare la formula che esprime il valore della somma degli angoli interni di un poligono in funzione del numero di lati (suggerimento: la somma degli angoli interni di un triangolo è di 180°).

9) In una scacchiera ci sono 8×8 quadratini. Nella scacchiera si possono così individuare quadrati di diverse dimensioni. Per esempio i più piccoli sono 64 quadrati di lato 1, il più grande è un quadrato di lato 8. Se chiamiamo la lunghezza del lato dei quadrati k , dimostrare che $(9 - k)^2$ è la formula che esprime il numero di quadrati di lato k contenuti nella scacchiera.

10) Scrivere con espressioni letterali semplificate:

- a) la superficie tratteggiata contenuta nel quadrato di lato a (ossia: Area = formula contenente a);
- b) la superficie tratteggiata definita dai due cerchi di raggio R e $2R$ (ossia: Area = formula contenente R).



2. OPERAZIONI ALGEBRICHE DI BASE

1) Date la seguente espressione algebrica $4x^{-1} - 2xy - 3\pi x + \frac{1}{2}x^2 - 5x + \sqrt{2}xy - 6 - 2yx$, si domanda:

- quali elementi sono dei monomi (o dei termini)?
- quali lettere sono delle variabili e quali delle costanti?
- quali monomi sono simili?
- quali monomi sono uguali?

2) Eseguire la somma algebrica dei seguenti monomi:

- $-\frac{1}{4}a + 2b^2 + 6a - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b^2 - 6a =$
- $2a^2 - (-3a^2) + (-5a^2) - a - (-a) =$
- $9x + 5x - 10x + x =$
- $-ab + 4ab - 12ab + \frac{1}{3}ab + 2ba =$
- $-\frac{1}{2}y + y - (-\frac{1}{4}y) - 7y + \frac{3y}{4} =$
- $ax^3 + x^3 + 3x^2 - (5x^3 + 2x^2) - [-(-2ax^3 + 4x^3)] =$

3) Completare la seguente tabella:

moltiplicato per	-3	$-x^2$	$2y^3$
-3			
-4x			
$\frac{1}{2}y$			

4) Eseguire la moltiplicazione tra i seguenti monomi:

- $2ab \cdot (-3a^2b) =$
- $-4xy^3 \cdot \frac{1}{2}x^3y^2 =$
- $-\frac{3}{4}a^3b^4c \cdot \left(-\frac{1}{2}ab^2c^5\right) =$
- $\left(-\frac{3}{4}a^3b^2\right) \cdot (-2ab^3) \cdot \left(\frac{4}{3}a^2\right) =$

5) Semplificare le seguenti espressioni con i monomi:

a) $a^2x \cdot \left(\frac{1}{2}x\right) + \left(\frac{1}{2}ax\right) \cdot \left(\frac{2}{3}a\right) - \frac{2}{3}a^2x^2 =$

b) $(-2x)\left(-\frac{1}{2}y\right) + (-2y)x + xy + y(-x) + 2xy + y(-x) =$

6) Calcolare le seguenti potenze di monomi:

a) $(-3a^3)^2 =$ b) $(2a^2b)^3 =$ c) $\left(-\frac{1}{2}a^3b^2c\right)^5 =$ d) $(-5ab^5)^3 =$

7) Quali monomi al quadrato danno rispettivamente:

a) $25a^{10}b^{14} ?$ b) $\frac{49}{9}a^{36}b^{100} ?$

8) Quali monomi al cubo danno rispettivamente:

a) $x^6y^9 ?$ b) $\frac{8}{27}a^9b^6c^3 ?$

9) Semplificare le seguenti espressioni con i monomi:

a) $[(-2xy)^2]^3 : (-2xy^2)^3 - 2(-x)^3 =$ b) $[-a(-a)^2 + a^5 : (-a^2)] + (-a)^3 + 2a^2(-a) =$

10) Dati i monomi $A = \frac{1}{2}x^2y$; $B = -2x^2y$; $C = -\frac{1}{3}x^2y$, risolvere:

a) $-(A+B) =$ b) $A-C =$ c) $B-(B-A)-A =$ d) $B+C-2A =$

11) Tradurre le seguenti frasi mediante un'uguaglianza tra monomi:

- a) Il prodotto di due numeri è uguale al prodotto dei loro opposti.
- b) Il prodotto dei doppi di due numeri è uguale al quadruplo del loro prodotto.
- c) Se al quintuplo di un numero si sottrae il suo triplo, si ottiene il suo doppio.
- d) Il quoziente tra il quadrato del doppio del prodotto di due numeri e il doppio del quadrato del secondo numero è uguale al doppio del quadrato del primo numero.

12) Un rettangolo ha base lunga $2c$ e altezza lunga $3a$; se si dimezza la base e si raddoppia l'altezza quale sarà la sua area? Calcolare inoltre la differenza tra il nuovo perimetro e il precedente.

13) Determinare M.C.D. e m.c.m. dei seguenti monomi:

a) x^2y^2 ; $2xy^2$; $4xy$
b) $72a^3b^2$; $18a^2b^3x^2$; $15a^4b^4x$

14) Ridurre i seguenti polinomi a forma normale:

- a) $2a^4 + 2ab^2 - 3a^4 + b^2 + a^4 + ab =$
 b) $(4x^3 - 5x^2 + 2) + (-3x^2 + 2x^2 - 2) =$
 c) $\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{5}\right) - \left(4 + \frac{1}{3}x - \frac{3}{5}x^2\right) =$

15) Eseguire la moltiplicazione tra i seguenti polinomi e monomi:

- a) $a(x + a) =$
 b) $(-xy)(-2x + y) =$
 c) $(a^2 - 3a - 1)(2a) =$
 d) $-3ab(a^2 + b^2) + ab(a^2 - b^2) + 2ab(a^2 + 2b^2) =$

16) Eseguire la moltiplicazione tra i seguenti polinomi:

- a) $(x + 1)(2x + 3)(x - 4) =$
 b) $(a + b)(a - b)(a^2 + b^2) =$
 c) $3a(a + 2)5a - 2a(a + 3)(a - 1) =$
 d) $(4x^3 - 2x^2 + 5x - 3) \cdot (2x^2 - 6x - 3) =$

17) Risolvere le seguenti divisioni:

- a) $(20a^4 - 12a^3 + 6a^2) : (2a^2) =$
 b) $(x^4 + 3x^2 - 4) : (x^2 - 4) =$
 c) $(a^3 + 2a^2b - 4ab^2 - 8b^3) : (a + 2b) =$
 d) $(x^5 - x^3 + 1) : (x^2 + 1) =$
 e) $(1 - x^6) : (x^2 + x^4 + 1) =$

18) Scegliere le risposte corrette:

Operazione	a)	b)	c)	d)	e)
$\frac{ax - b}{a} =$	$\frac{x - b}{a}$	$x - b$	$x - \frac{b}{a}$	$\frac{x}{a} - b$	$\frac{x}{a} - \frac{b}{a}$
$x^2 = 4 \Rightarrow x = ?$	2	-2	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	± 2
$-\frac{6x + 4}{2} =$	$-\frac{6x}{2} + \frac{4}{2}$	$-3x + 2$	$+3x + 2$	$-3x - 2$	$3x + 2$
$\sqrt{\frac{1}{a}} =$	$a^{\frac{1}{3}}$	a^2	$a^{-\frac{1}{2}}$	a^{-2}	$a^{\frac{1}{2}}$
$2^{\frac{5}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} =$	$\frac{1}{2}$	2	16	$2^{\frac{15}{4}}$	nessuna delle precedenti

3. PRODOTTI NOTEVOLI

1) Risolvere o sviluppare le seguenti operazioni utilizzando le regole sui prodotti notevoli:

a) $(\Delta + \Theta)^2 =$

b) $(a + b)^2 =$

c) $(a - b)^2 =$

d) $(a - b) \cdot (a - b) =$

e) $(m + n) \cdot (m - n) =$

f) $(m + n)^2 =$

g) $(p - q)^2 =$

h) $(4 + 3t)^2 =$

i) $(5p^2 - 2q^2)^2 =$

l) $[(2a - 3b) - 4c][(2a - 3b) + 4c] =$

2) Non tutte le uguaglianze proposte sono corrette. Individuare quelle giuste e correggere quelle sbagliate:

Uguaglianza	Giusta	Eventuale correzione
$(a + b)(a + b) = a^2 + b^2$		
$(a + b)(b - a) = b^2 - a^2$		
$(-a - b)^2 = (a + b)^2$		
$a^3 + b^3 = (a + b)^3$		
$\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$		
$(x + y)^2 = x^2 + y^2$		
$(-a + b)(b - a) = (a - b)^2$		
$\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$		

3) Indicare con una crocetta a quale tipo di prodotto notevole corrisponde l'espressione algebrica data:

Espressione algebrica	$(a + b)^2$	$(a - b)^2$	$a^2 - b^2$	$(a + b)^3$	$(a - b)^3$	$a^3 + b^3$	$a^3 - b^3$	Trinomio tipico
$x^2 - 2xy + y^2$								
$(m + n)(m - n)$								
$c^2 + 2bc + b^2$								
$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$								
$(x - y)(x^2 + xy + y^2)$								
$(m + n)(m^2 - mn + n^2)$								
$x^2 - x - 2$								

4) Prova il seguente calcolo:

- scegli tre numeri interi consecutivi che chiameremo A, B e C (per esempio $A = 853$; $B = 854$; $C = 855$)
- moltiplica A per C ($853 \cdot 855 = 729'315$)
- eleva al quadrato B ($854 \cdot 854 = 729'316$)
- sottrai dal quadrato di B il prodotto di A con C ($B^2 - A \cdot C = 729'316 - 729'315 = 1$)
- il risultato sarà sempre 1!

Scrivi algebricamente il procedimento spiegato sopra e dimostra che il risultato è sempre 1.

Suggerimento: utilizza il prodotto notevole $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

5) La somma dei quadrati di tre numeri dispari consecutivi, divisa per 12, dà come resto sempre 11.

Scrivere l'espressione in modo letterale, risolverla e verificare quanto scritto sopra.

Suggerimento: un numero dispari può essere scritto nella forma $(2n + 1)$ con $n \in \mathbb{N}$.

6) Semplificare il più possibile le seguenti espressioni:

- a) $(a - b)^2 - (a - 2b)^2 + (a - b)(a + b) =$
- b) $(x + 1)^3 + 3(x + 1)^2 + 3(x + 1) + 1 =$
- c) $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) - (a^2 + b^2)^2 + 2a(a^2 + b^2) =$
- d) $\{[(x^3 - y^3) + (x + y)^3 + 2x^2y - x(2x + 3y)(x + y)]^2 - 2\}^3 =$
- e) $\left[\left(a - b - \frac{1}{2} \right) \left(-a + b - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} \right] \cdot (a + b)^2 + (a^2 - b^2)^2 =$
- f) $(x^n - y^n)^2 - 3x^n(y^n - x^n) - (2x^n + y^n)^2 =$

7) Risolvere la seguente espressione utilizzando i prodotti notevoli: $\left(\sqrt{y + \sqrt{y^2 - x^2}} + \sqrt{y - \sqrt{y^2 - x^2}} \right)^2 =$

4. SCOMPOSIZIONE IN FATTORI

- 1) Scomporre in fattori il più possibile le seguenti espressioni utilizzando la tecnica del raccoglimento a fattore comune:

a) $a^3x^2 - a^3y^2 =$
 b) $x^3 + 4x =$
 c) $4m^4 - 2m^3 - 2m^6 =$
 d) $4x^2y^5 - 12xy^6 - 6xy^5 =$

- 2) Scomporre in fattori il più possibile le seguenti espressioni utilizzando la tecnica del raccoglimento parziale:

a) $5ax - x - 5a + 1 =$
 b) $3ab - 6ac + b^2 - 2bc =$
 c) $12a^2 - 4a - 3a + 1 =$
 d) $3(a + b) + x(a - b) - 3(a - b) - x(a + b) =$

- 3) Scomporre in fattori il più possibile le seguenti espressioni utilizzando i prodotti notevoli:

a) $4x^2 - 9y^2 =$
 b) $(a + 3b)^2 - 25b^2 =$
 c) $5m^2 - 5 =$
 d) $x^2 - 10x + 25 =$
 e) $6ab^3 + b^6 + 9a^2 =$
 f) $a^2 + 2ab - c^2 + b^2 =$
 g) $-x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3 =$
 h) $x^4 - y^4 =$

- 4) Nella seguente tabella scegliere il tipo di prodotti notevoli fondamentali che generano le espressioni indicate:

Espressione algebrica	$(a + b)^2$	$(a - b)^2$	$(a + b)(a - b)$	$(a + b)^3$	$(a - b)^3$	$a^3 + b^3$	$a^3 - b^3$
a) $m^2 + 2mn + n^2$							
b) $x^2 - y^2$							
c) $4p^2 + 4p + 1$							
d) $c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3$							
e) $(2x - 2y)(4x^2 + 4xy + 4y^2)$							
f) $(3m + 2n)(9m^2 - 6mn + 4n^2)$							

5) Scomporre in fattori il più possibile i seguenti trinomi tipici:

- a) $a^2 + 8a + 15 =$
- b) $x^2 + 4x - 21 =$
- c) $a^4 + a^2 - 2 =$

6) Scomporre in fattori il più possibile le seguenti espressioni:

a) $p^2 + 2pq + q^2 =$	b) $3x + 6y =$
c) $\Delta^2 - O^2 =$	d) $\frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{2}a =$
e) $6ab + 12a^2b =$	f) $x^3 + 2x^2y + xy^2 =$
g) $x^3 - x^2 + x - 1 =$	h) $p^4 + q^4 - pq^3 - p^3q =$
i) $(a - b)m - a + b =$	l) $64x^3 + 27 =$
m) $x^4 - 16 =$	n) $a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 =$
o) $1 - a^8 =$	p) $8x^3 - 27y^3 =$
q) $x^2(x^2 - 4) - x^4 + 4 =$	r) $2x^6 + 12x^4 + 24x^2 + 16 =$

7) Risolvere le seguenti equazioni utilizzando le tecniche di fattorizzazione adeguate:

- a) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$
- b) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

5. FRAZIONI ALGEBRICHE

1) Indicare le condizioni di esistenza delle seguenti frazioni:

a) $\frac{x+y}{2xy}$

b) $\frac{5x-1}{2x+3}$

c) $\frac{2x-5}{x^2-4}$

d) $\frac{a-4}{a^5-27a^2}$

2) Semplificare le seguenti frazioni algebriche ai minimi termini:

a) $\frac{15a^3b^5}{3a^4b^2} =$

b) $\frac{x^2-4x+4}{3x^2-12} =$

c) $\frac{-x-y}{x+y} =$

d) $\frac{m^2-9}{m^3-3m^2} =$

e) $\frac{t-5}{25-t^2} =$

f) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^3-b^3} =$

g) $\frac{x^4-1}{x^2-1} =$

h) $\frac{(a+b)^2-4ab}{(a-b)^2} =$

i) $\frac{c^2-d^2+c-d}{c^2+2cd+d^2-1} =$

j) $\frac{x^6-y^6}{x^4+x^3y-xy^3-y^4} =$

3) Eseguire le operazioni con le seguenti frazioni:

a) $\frac{1}{2x} - \frac{x-1}{x} =$

b) $\frac{1}{6b} - \frac{2}{3b} + \frac{1}{2b} =$

c) $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+x} + \frac{1}{2} =$

d) $\frac{x+2}{x^2+x-2} + \frac{x}{x+2} - \frac{1}{x-1} =$

e) $\frac{1}{(a-b)(a-x)} + \frac{1}{(b-a)(b-x)} + \frac{1}{(x-a)(x-b)} =$

4) Semplificare le seguenti frazioni (se possibile) ed effettuare l'elevazione a potenza:

a) $\left(\frac{3a^2b^3}{4c^4}\right)^2 =$

b) $\left(\frac{2a+2b}{a^2+2ab+b^2}\right)^3 =$

c) $\left(-\frac{2ac^2}{3b^4}\right)^{-2} =$

d) $\left[\left(\frac{a+b}{a^2-b^2}\right)^2\right]^{-1} =$

5) Risolvere le seguenti operazioni con le frazioni algebriche:

$$a) \quad \frac{a}{3b^3} \cdot \frac{9b^2}{2a^2} =$$

$$b) \quad \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \cdot \frac{x}{x-1} =$$

$$c) \quad \frac{a^3-2}{4a^2y} + \frac{1}{2} - \frac{a}{4y} + \frac{1}{2a^2y} =$$

$$d) \quad \frac{m^3+n^3}{m^2-n^2} : \frac{m^3-m^2n+mn^2}{2m-2n} =$$

6) Risolvere le operazioni con le seguenti frazioni a termini frazionari:

$$a) \quad \frac{\frac{x}{y} + 1}{(x+y)^2} =$$

$$b) \quad \frac{\frac{1}{d} - \frac{1}{c}}{c^2 - d^2} =$$

$$c) \quad \frac{\frac{1}{a^2} + \frac{2}{ab} + \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} =$$

$$d) \quad \frac{\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2}}{\frac{1}{p^3} - \frac{1}{q^3}} =$$

$$e) \quad \frac{\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y}}{\frac{2y}{x^2 - y^2}} =$$

$$f) \quad \frac{\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}{\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}} =$$

7) Razionalizzare i denominatori delle seguenti frazioni:

$$a) \quad \frac{1}{\sqrt{x}} =$$

$$b) \quad \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} =$$

$$c) \quad \frac{ab}{3\sqrt[4]{ab}} =$$

$$d) \quad \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} =$$

6. EQUAZIONI DI PRIMO GRADO

- 1) Spiegare e fare un esempio per ciascuna delle seguenti denominazioni:

Uguaglianza	Equazione	Identità
Risolvere un'equazione in x	Soluzioni o radici dell'equazione in x	Soluzioni determinate
Soluzioni indeterminate	Soluzioni impossibili	Soluzione estranea

- 2) Date le seguenti uguaglianze, verificare se si tratta di equazioni o identità:

- a) $2 + 3x = 5x$
 b) $2x + 3x = 5x$
 c) $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$
 d) $\frac{x}{2} - 4 = (x - 8) \cdot \frac{1}{2}$

- 3) Date le seguenti equazioni intere, indicare se sono determinate, indeterminate o impossibili:

- a) $4x - 12 - 3x = 5 + x - 17$
 b) $2(x - 1) - 2x = 0$
 c) $(x - 1)^2 + 3(x - 1) = -2x + (x + 2)^2$
 d) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}x - 1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{3}x$

- 4) Verificare se i valori dati sono soluzioni delle rispettive equazioni intere:

- a) $1 - x = 2x + 7$ $x = 3; \quad x = -2$
 b) $(y - 2)^2 + 14 = 8y - 3y$ $y = 3; \quad y = -2$
 c) $2x^2(x - 1) - x = x^2 + 10x - 6$ $x = \frac{1}{2}; \quad x = -\frac{1}{3}$
 d) $(x - 3)\left(\frac{1}{2} + x\right)(x^2 + 2x + 1) = 0$ $x = 3; \quad x = \frac{1}{2} \quad x = 1$

- 5) Completare inserendo un numero in modo che l'equazione $4x + \dots = 5$ abbia soluzione:

- a) in $\mathbf{N}$, b) in $\mathbf{Z}$ ma non in $\mathbf{N}$; c) in $\mathbf{Q}$ ma non in $\mathbf{Z}$.

6) Risolvere le seguenti equazioni intere, scrivendo le operazioni effettuate ad ogni passaggio successivo:

- a) $3x - 1 = 2x + 5$
- b) $8x - 3 + 2x = 6x + 1 + 4x$
- c) $(x+3)^2 - 10 - (x-2)^2 = (x-1)^2 - (x-5)^2 + 4 + x$
- d) $\frac{5}{3} + x - \frac{x+2}{3} + \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = (x+1)^2 - \frac{9}{4}$
- e) $(x-1)^2 + (x+1)^2 = 2(x^2 + 1)$
- f) $\frac{(2x - \frac{1}{4})}{1 - \frac{2}{3}} : \left(\frac{3 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{3}}\right) \cdot \frac{11}{2} - \frac{x - \frac{2}{3}}{3 - \frac{1}{4}} \cdot \left[5\left(2 - \frac{3}{2}\right) + 3\right] = \frac{x-1}{3 - \frac{3}{2}}$

7) Risolvere le seguenti equazioni intere utilizzando la legge dell'annullamento del prodotto:

- a) $6x(x-1) = 0$
- b) $4(x-3)(6x-1) = 0$
- c) $\left(\frac{1}{2}x + 3\right)\left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{2}\right) \cdot 3 = 0$
- d) $\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right)(x+1)(2x-4) = 0$

8) Risolvere le seguenti equazioni utilizzando la scomposizione in fattori:

- a) $x^2 + 12x = 0$
- b) $x^2 = 9$
- c) $x^3 + 6x^2 + 8x = 0$
- d) $x^2 + 2x + 1 = 0$
- e) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$
- f) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

9) Risolvere le seguenti equazioni fratte indicando le condizioni di esistenza e la soluzione finale:

- a) $\frac{9}{x-2} = 3$
- b) $2 + \frac{3}{x} = 0$
- c) $x + \frac{4}{4-x} = \frac{x}{4-x} + x + 4$
- d) $\frac{4}{x^2-4} + \frac{1}{x^2-2x} = \frac{3}{x^2+2x}$

10) Date le seguenti formule, risolverle rispetto alla lettera indicata:

- a) Area di un trapezio: $A = \frac{(B+b) \cdot h}{2} \Rightarrow B = ?$
- b) Volume di un cono: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow r = ?$
- c) Area totale di un cilindro: $A = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \Rightarrow h = ?$
- d) Spazio percorso a velocità costante: $s = s_0 + v \cdot t \Rightarrow t = ?$
- e) resistenza e bobina in parallelo: $Z = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X}\right)^2}} \Rightarrow X = ?$

11) Per ognuna delle seguenti equazioni, indica con una crocette le sue caratteristiche:

Equazione	numerica	letterale	intera	fratta	a coefficienti interi	a coefficienti letterali	a coefficienti razionali	a una incognita	a due incognite
$-8 + 4x = 12x - 3$									
$-8 + 4x + 12x - 34ax - 12 = 5(x + a)$									
$9x - 6y = 2x - y + 2$									
$\frac{3x+2}{5} - \frac{1}{4}x + 2 = \frac{1}{5}x$									
$\frac{8ax-5}{2a} + \frac{5x+3}{4a-1} = 0$									
$\frac{x+y}{2} - \frac{2x-1}{4} = x - y$									
$3ax - \frac{2y}{4a} = \frac{ax+by}{ab}$									
$-11x + \frac{5}{9y} = 3 + 4y - 2x$									
$\frac{11x+2y}{x+y} - \frac{x}{y} = \frac{x+y}{x-y}$									

12) Risolvere le seguenti equazioni intere, fratte o letterali utilizzando le tecniche più appropriate:

a) $2x(x^4 - 81)(x+1) = 0$

b) $4 + \frac{x+3}{2} + \frac{x+7}{3} = \frac{5}{6}x$

c) $\frac{9}{2} \cdot \left(1 + \frac{\frac{1-x}{2}}{\frac{3}{4}-1} \right) + 6 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1+x}{8} \right) = \frac{\frac{x}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} - \frac{3}{4}$

d) $\frac{4x^2}{4x^2-1} + \frac{3}{2x+1} = \frac{2x+1}{2x-1}$

e) $\frac{x+6}{x-8} + \frac{224}{x^2-64} = -\frac{x-6}{8-x}$

f) $\frac{8x^3+4x^2+1}{8x^3+8x^2-2x-2} - \frac{2x-2}{4x+4} = \frac{2x+1}{4x-2}$

g) $ax + b^2 = a^2 - bx$

h) $\frac{x-m}{m+n} - \frac{2nx}{m^2-n^2} + \frac{x+m}{m-n} = \frac{x+n}{m-n} + \frac{x-n}{m+n}$

i) $\frac{\frac{x-a}{b} - \frac{x-b}{a}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} + \frac{\frac{x}{b} - \frac{x}{a}}{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}} = 1$

7. SISTEMI DI EQUAZIONI

1) Risolvere i seguenti sistemi di equazioni con il metodo della sostituzione:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y = -2 \\ 2x - 3y = -7 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x = 3 - y \\ 5y = 12 - 2x \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = 1 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 13x + 11y = 21 \\ 6y + 7x + 3 = 0 \end{cases}$$

2) Risolvere i seguenti sistemi di equazioni con il metodo del confronto:

$$\text{a) } \begin{cases} 4x + 3y = 17 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + y = 6 \\ 3x + 4y = 4 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 6 \\ -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

3) Risolvere i seguenti sistemi di equazioni con il metodo dell'addizione o della sottrazione:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y = 4 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x + 7y = 2 \\ 4x + 3 = 2y \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{x+3}{3} = 2 - y \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x - y = 3(y + 2) \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = 2 \end{cases}$$

4) Risolvere i seguenti sistemi di equazioni letterali, fratte o numeriche utilizzando il metodo più appropriato:

$$\text{a) } \begin{cases} 2(2y - 1) = -\frac{1}{3}x \\ \frac{x + 3y - 1}{3} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}x - y \right) \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{x} \\ x - y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y = 3a \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ 4x + 2y - z = 5 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x + y = 2a \\ x - y = 2b \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2 \\ bx - ay = 0 \end{cases}$$

8. RISOLUZIONE DI PROBLEMI

Le seguenti affermazioni sono corrette. Provare a spiegarne il motivo.

- 1) Il padre di William è più vecchio del nonno di William. Com'è possibile?
- 2) Nel 1980 Ben aveva 20 anni, ma nel 1985 ne aveva solo 15. Com'è possibile?
- 3) Due soldati erano stati posti di guardia all'esterno della caserma. Uno sorvegliava la strada che proveniva da Nord, l'altro sorvegliava quella che proveniva da Sud. Ad un certo punto uno chiese all'altro: "Perché stai sorridendo?". Come faceva a sapere che il suo compagno stava sorridendo?
- 4) Una linea ferroviaria a un solo binario passa sotto un tunnel che va da Est a Ovest. Un pomeriggio, due treni che viaggiavano sullo stesso binario alla stessa velocità, entrarono nel tunnel, uno procedendo verso Est e l'altro verso Ovest. Non vi furono fermate o variazioni di velocità, ciononostante non si scontrarono. Come mai?
- 5) Il 22. e il 24. presidente degli Stati Uniti d'America avevano lo stesso padre e la stessa madre, ma non erano fratelli. Come mai?

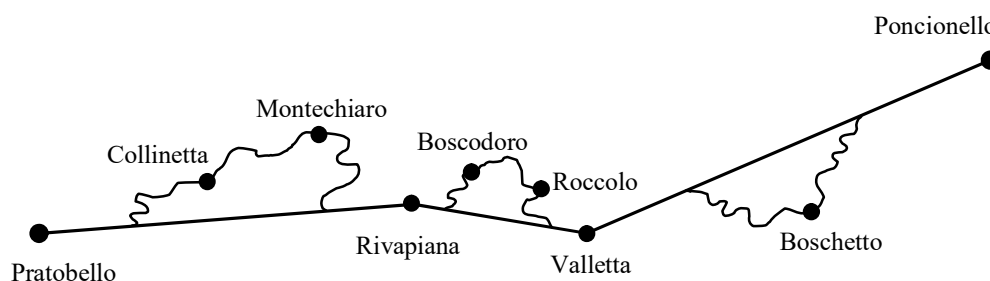
Scegliere le risposte corrette dei seguenti esercizi motivando la risposta.

- 6) Roberto scommette che se il vecchio allenatore tornasse alla guida della Nazionale di calcio, questa vincerebbe sempre. In quali casi Roberto perderebbe certamente la scommessa ?
 - a) Il vecchio allenatore non torna ad allenare la Nazionale;
 - b) Il vecchio allenatore torna ad allenare la Nazionale e questa non perde mai;
 - c) Il vecchio allenatore torna ad allenare la Nazionale e questa non vince tutte le partite;
 - d) Il vecchio allenatore non torna ad allenare la Nazionale e questa vince sempre;
 - e) Il vecchio allenatore non torna ad allenare la Nazionale e questa non vince mai.
- 7) Nel campionato di calcio dello scorso anno fra i rigori concessi il 60% è stato a favore della squadra di casa e il 40% a favore della squadra ospite. Sappiamo che l'80% dei rigori della squadra di casa è stato realizzato, mentre solo il 75% dei rigori della squadra ospite è andato a segno. Qual è la percentuale complessiva di rigori segnati ?
 - a) minore del 75%; b) 77%; c) 77,5%; d) 78%; e) maggiore dell' 80%.
- 8) In una città di confine si sa che la popolazione parla o tedesco, o francese o entrambe le lingue. In particolare, il 70% parla tedesco mentre il 60% parla il francese. Quale percentuale della popolazione parla entrambe le lingue?
 - a) 10%; b) 30%; c) 60% d) 65% e) non si può sapere

- 9) Un responsabile di una ditta di autobus, riceve dai sindaci dei comuni di una valle che intendono creare una nuova linea per il trasporto pubblico, l'orario seguente:

Fermate	Pratobello → Poncionello				Poncionello → Pratobello			
Pratobello	7.30	9.30	15.40	18.00	9.15	11.05	17.30	19.35
Collinetta	7.45	↓	15.55	↓	9.00	↑	17.15	↑
Montechiaro	7.50	↓	16.00	↓	8.55	↑	17.10	↑
Rivapiana	8.20	10.10	16.30	18.40	8.25	10.35	16.40	18.55
Boscodoro	8.30	↓	16.40	↓	8.15	↑	16.30	↑
Roccolo	8.45	↓	16.55	↓	8.00	↑	16.15	↑
Valletta	9.05	10.25	17.15	18.55	7.40	10.20	15.55	18.40
Boschetto	9.15	↓	17.25	↓	7.30	↑	15.45	↑
Poncionello	9.30	10.55	17.40	19.25	7.15	9.50	15.30	18.10

Quanti autobus sono necessari per garantire tutte le corse giornaliere?



Dati i seguenti problemi, risolverli **applicando i 6 punti spiegati nella teoria**.

- 10) Un papà ha 42 anni, suo figlio 12. A che età il papà avrà il doppio degli anni di suo figlio?
- 11) Se si lascia cadere una palla, essa rimbalza sempre ad un'altezza che equivale sempre ai $\frac{2}{7}$ dell'altezza precedente. Al terzo rimbalzo la palla raggiunge un'altezza di 45 cm. Calcolare da che altezza iniziale è stata lasciata cadere la palla.
- 12) In un rombo la somma delle due diagonali è 84 cm. Sapendo che la differenza tra la diagonale minore e $\frac{5}{12}$ della diagonale maggiore è uguale a 16 cm, trova il perimetro e l'area del rombo.
- 13) Trecento persone tra uomini, donne e ragazzi e ragazze partecipano a una festa. Le donne sono $\frac{6}{5}$ degli uomini e sia i ragazzi sia le ragazze, sono ciascuno $\frac{1}{3}$ delle donne. Determinare il loro rispettivo numero.
- 14) Una pista di sci lunga 7 km ha tre gradi di difficoltà. Quanti chilometri di pista di difficoltà media ci sono, sapendo che il tratto difficile è metà del medio e doppio di quello facile?

-
- 15) In una scatola a forma di parallelepipedo, la somma delle tre dimensioni è 41 cm. Lo spigolo minore differisce di 3 cm dal medio, mentre il maggiore è uguale ai $\frac{5}{3}$ del medio. Se verso nella scatola 2 litri di acqua, questa fuoriesce?
- 16) Il biglietto di entrata di un cinema costa Fr 15.- per gli adulti, Fr 10.- per i bambini e Fr 12.- per gli anziani. L'incasso della proiezioni pomeridiana è stato di Fr 1780.-. Sapendo che sono stati venduti in totale 135 biglietti e che i bambini erano la metà degli adulti, calcolare il numero di adulti, bambini e anziani che hanno visto il film.
- 17) Per coprire una spesa di Fr 300.-, Michele, Roberto e Sara decidono quanto segue: Michele pagherà $\frac{1}{5}$ della somma pagata complessivamente da Roberto e Sara, Roberto pagherà $\frac{3}{7}$ della somma pagata da Sara. Calcolare l'importo pagato da ciascuno.
- 18) Un autista pensa di percorrere la distanza fra due città A e B ad una media di 80 km/h. Se nella prima metà del tragitto mantiene una media di 72 km/h, con quale velocità media dovrà percorrere la seconda metà del viaggio ?
- 19) Il sistema di raffreddamento di un motore di un'automobile contiene 16 litri di fluido refrigerante costituito da una miscela all'80% di acqua e 20% di antigelo. Per il mutare delle condizioni climatiche, si rende necessario aumentare la quantità di antigelo al 40%. Questa operazione avverrà scaricando parte della vecchia miscela e rabboccando l'antigelo fino a raggiungere nuovamente i 16 litri. Quanta miscela iniziale al 20% deve essere scaricata ?
- 20) In una certa fabbrica le domande di lavoro presentate dagli uomini sono il doppio di quelle presentate dalle donne. Se viene assunto il 3% degli uomini che hanno presentato domanda e le assunzioni totali sono pari al 5% di tutte le domande, qual è la percentuale di donne assunte rispetto alle aspiranti ?
- 21) Un negozio è specializzato nella preparazione di miscele di caffè. A partire da caffè provenienti dalla Colombia, dal Brasile e dall'Ecuador, il proprietario desidera preparare dei pacchetti che si venderanno a Fr 8,50. Si sa che:
- i prezzi al pacchetto dei caffè provenienti dai rispettivi paesi sono: Fr 10.-, Fr 6.- e Fr 8.-;
 - la quantità di caffè colombiano dovrà essere tre volte superiore a quello brasiliano;
- Determinare le percentuali delle rispettive quantità di caffè contenute nella confezione di vendita.